Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1999–2000

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

NB. Det kræves ikke godtgjort i besvarelsen, at 1999 er et primtal.

1. Vis, at restklassen af 2 modulo 1999 er invertibel, og angiv den inverse restklasse.

2. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/495)^*$ ordenen af restklassen af 2.

3. Vis, at for hvert helt tal a har kongruensen $x^3 \equiv a \pmod{10}$ en, og modulo 10 kun én, løsning x.

4. Angiv, idet $\sigma = (1\,2)(7\,6)(2\,3)(5\,6)(3\,4)$ i S_7, orden, cykeltype og fortegn for permutationen σ^{2000}.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket den alternerende gruppe A_n indeholder et element af orden 2000.

6. Vis, at hvis den symmetriske gruppe S_n indeholder en undergruppe af orden 2000, så er $n \geq 15$. Vis, at S_{23} indeholder en kommutativ undergruppe af orden 2000.

7. Hvilken orden har Sylow-1999-undergruppen i S_{2000}.

8. For hvilke værdier af n indeholder diedergruppen D_n en undergruppe af orden 2000.

9. Lad H være en undergruppe af den symmetriske gruppe S_n. Vis, at enten er $H \subseteq \mathrm{A}_n$ eller også indeholder H det samme antal lige og ulige permutationer.

10. En kommutativ gruppe G af orden 2000 har præcis et element af orden 2 og præcis 4 elementer af orden 5. Vis, at G må være cyklisk.

11. Hvor mange forskellige perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2000} - 1000X^2 - 50$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 1999, at f har præcis 2 rødder i $\mathbb{F}_{1999}$. [Vink: brug for eksempel Fermat's lille sætning til at vise, for $x \in \mathbb{Z}$, at $2f(x) \equiv x^2 - 100 \pmod{1999}$.]

15. Bestem for $k = 2000$ en løsning $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ til ligningen $x^2 + y^2 = k^2$ således, at 5 ikke går op i x.