Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1999

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/385)^*$ ordenen af restklassen af 2.

2. Bestem potensen σ^{1999} af permutationen $\sigma = (1\,2)(7\,6)(2\,3)(5\,6)(3\,4)$ i S_7.

3. Vis, at der ved $x \mapsto x^3 + 3$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens type, orden og fortegn.

4. Vis, at der findes en undergruppe af orden 15 i S_8. Findes der en undergruppe af orden 15 i S_7?

5. Bestem antallet af permutationer af type 2^3 i S_7 og i A_8.

6. Lad d være en ulige divisor i n. Vis, at diedergruppen D_n har præcis én undergruppe af orden d.

7. Betragt i en gruppe G to forskellige elementer a og b af orden 2. Vis, at ab har orden 2, hvis og kun hvis a og b kommuterer.

8. Lad p være et primtal. Bestem antallet af ikke-trivielle undergrupper af gruppen $\mathrm{C}_p \times \mathrm{C}_p$.

9. Vis, at Sylow-3-undergrupperne i S_6 er isomorfe med $\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$.

10. Overfladen på badebolde, af perfekt kugleform, er delt i 10 lige store områder via en ækvator og 5 længdekredse (som på en globus), der deler ækvator i 5 lige store dele. Hvert område kan være farvet rødt eller hvidt. Hvor mange badebolde findes der?

I de næste fire opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 1$.

11. Vis, at enhedsroden $\zeta = e^{2\pi i/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$ er rod i f.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Bestem, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 5, primopløsningen af f i $\mathbb{F}_5[X]$.

15. Vis, at normen af tallet $12 + 5\sqrt{-7}$ er delelig med 11. Bestem i talringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ en irreducibel opløsning af $12 + 5\sqrt{-7}$.