Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998–99

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 3 \pmod 4$ og $a \equiv 6 \pmod{25}$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/100)^*$, har restklassen af a modulo 100.

2. Lad G være en endelig kommutativ gruppe. Vis, at afbildningen $x \mapsto x^2$, af G ind i G, er bijektiv, hvis og kun hvis G er af ulige orden.

3. Vis, at der ved $x \mapsto 7x + 2$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.

4. Bestem for den symmetriske gruppe A_8 antallet af elementer af orden 2.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 1998. [Vink: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$.]

6. Lad G være en gruppe af orden 120. Vis, at antallet af elementer i G af orden 5 er enten 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.

7. Antag, at tallet $2^\nu - 1$ er et primtal. Gør rede for, at en gruppe af orden $2^\nu(2^\nu - 1)$ ikke kan være simpel.

8. Bestem en værdi af n således, at der er præcis 6 kommutative grupper af orden n.

9. Hvor mange karusseller med 10 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.

10. Lad L være et legeme med 27 elementer. Vis, at L har karakteristik 3 og at L's additive gruppe er isomorf med $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^4 + 100X^3 + 100X + 50$.

11. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

13. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, at i $\mathbb{F}_3[X]$ er $X^2 + 1$ divisor i f.

14. Vis, at tallet $16 + 15i$ har en norm, der er delelig med 13. Angiv, i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$, en primopløsning af $16 + 15i$.

15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 1998.