Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1998

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 1 \pmod 4$, $a \equiv 2 \pmod 5$ og $a \equiv 5 \pmod 9$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/180)^*$, har restklassen af a modulo 180.

2. Om en gruppe G vides, at afbildningen $x \mapsto x^2$ er en homomorfi $G \to G$. Vis, at G er abelsk.

3. Vis, at der ved $x \mapsto 3x + 5$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \ldots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.

4. Bestem for den symmetriske gruppe S_6 antallet af elementer af orden 6.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 30.

6. Lad G være en gruppe af orden 60, og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 5. Vis, at $a(G)$ er 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.

7. Gør rede for, at en gruppe af orden $992 = 31 \cdot 32$ ikke kan være simpel.

8. En gruppe af orden 120 indeholder 8 elementer af orden 6. Vis, at gruppen ikke er kommutativ.

9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem.

10. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.

11. Lad L være et legeme med 2^ν elementer. Vis, at L har karakteristik 2, og beskriv strukturen af L's additive gruppe.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^{16} + 12$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 17, om f har en rod i $\mathbb{F}_{17}$.

15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 150.