

## Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Bestem et helt tal  $a$  således, at  $a \equiv 5 \pmod{8}$  og  $a \equiv 2 \pmod{9}$ . Hvilken orden, i gruppen  $(\mathbb{Z}/72)^*$ , har restklassen af  $a$  modulo 72?
2. I den symmetriske gruppe  $S_9$  betragtes permutationen,

$$\sigma = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5)(5\ 6\ 7\ 8\ 9))^3.$$

Bestem fortegnet for  $\sigma$ . Angiv typen af  $\sigma$ .

3. Angiv i gruppen  $A_7$  et element af hver af de forekommende ordener.
4. Hvor mange permutationer i  $S_8$  har typen  $2^1 3^2$ ?
5. Vis, at følgende grupper parvis er ikke-isomorfe:  $C_{12}$ ,  $C_6 \times C_2$ ,  $A_4$ ,  $D_3 \times C_2$ .
6. Vis, at Klein's Vier-gruppe  $V$  er isomorf med en undergruppe af diedergruppen  $D_n$ , hvis og kun hvis  $n$  er lige.
7. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har et element af orden 24, så er gruppen cyklisk.
8. Talrummet  $\mathbb{R}^4$  kan opfattes som mængden af afbildninger  $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Følgelig virker  $S_4$  på  $\mathbb{R}^4$ . Bestem isotropigruppen for vektoren  $(1, 1, 0, 0)$ . Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.
9. Vis, at en gruppe af orden  $5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$  ikke kan være simpel.
10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte  $5 \times 5 = 25$  små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
11. Vis, at netop ét af polynomierne  $X^{12} - 8$ ,  $X^{12} - 9$  og  $X^{12} - 10$  er irreducibelt i  $\mathbb{Q}[X]$ .
12. Angiv i  $\mathbb{F}_2[X]$  et polynomium, som er reducibelt og uden rødder i  $\mathbb{F}_2$ .
13. Bestem i polynomiumsringen  $\mathbb{F}_5[X]$  antallet af normerede irreducible polynomier af grad 2.
14. Afgør, i den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ , hvilke af tallene  $1 \pm 6\sqrt{-7}$ , der har  $2 + \sqrt{-7}$  som divisor. Hvilke divisorer har  $2 + \sqrt{-7}$ ?
15. For hvilke tal  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  har ligningen  $x^2 + y^2 = n!$  heltalsløsninger  $(x, y)$ ?