Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1997

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Permutationen σ i S_6 er et produkt af fire 3-cykler,

$$\sigma = (4\,5\,6)(3\,4\,5)(2\,3\,4)(1\,2\,3).$$

Bestem fortegnet for σ. Angiv fremstillingen af σ som produkt af disjunkte cykler.

2. En permutation μ i S_{10} har typen $4^1 6^1$. Hvilken type har μ^3?

3. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har præcis ét element af orden 2, så er gruppen cyklisk.

4. For en endelig gruppe G og $n \in \mathbb{N}$ betegnes med $\alpha_n(G)$ antallet af elementer i G, hvis orden er divisor i n. Vis, at hvis G er et direkte produkt, $G = G_1 \times G_2$, så er $\alpha_n(G) = \alpha_n(G_1)\alpha_n(G_2)$.

5. Angiv antallet af elementer af orden 2 i hver af følgende grupper: C_{60}, A_5, $A_4 \times C_5$, D_{30}, $D_3 \times D_5$.

6. Vis, at den cykliske gruppe C_4 er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er delelig med 4.

7. Produktmængden $X := \{0, 1\}^4$ af 4-sæt (x_1, x_2, x_3, x_4) med $x_i \in \{0, 1\}$ kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1\}$. Følgelig virker S_4 på X. Beskriv isotropigrupperne for denne virkning.

8. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $4 \times 4 = 16$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

9. Lad S_1 og S_2 være grupper af orden 2^ν og lad H_1 og H_2 være grupper af ulige orden. Vis, at hvis $S_1 \times H_1$ og $S_2 \times H_2$ er isomorfe, så er S_1 og S_2 isomorfe.

10. Vis, at en gruppe af orden 880 ikke kan være simpel.

11. Bestem, i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$, antallet af irreducible polynomier af grad 2.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 21X + 63$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$, hvor $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$ og koefficienterne i f fortolkes som restklasser modulo 2.

15. Angiv, i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$, primopløsningen af tallet $11 + 2i$.