Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1996-97

Matematik 2AL (Ny ordning)

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Angiv 4 ikke-isomorfe grupper af orden 140.

2. Vis, at diedergruppen D_4 indeholder to ikke-isomorfe undergrupper af orden 4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 12x^2 + 18$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.

4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.

5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor $\mathbb{Z}_5$ er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i $\mathbb{Z}_5$.

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_7. En permutation kaldes en *dobbelttransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_7:

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6) \qquad \text{og} \qquad \tau = (5\,6\,7).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.

7. Vis, at enhver permutation $\mu \neq \mathrm{id}$ i A_7, som opfylder $\mu^2 = \mathrm{id}$, er en dobbelttransposition.

8. Bestem antallet af dobbelttranspositioner i S_7.

9. Hvilke af tallene $1, 2, \dots, 15$ er ikke orden af et element i S_7?

10. Bestem antallet af permutationer i S_7 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ, dvs de permutationer μ i S_7, for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.

11. Vis, at en gruppe af orden 140 ikke kan være simpel.

12. Hvilke af tallene $1+i$, $1+2i$, $1+3i$, $1+4i$, og $1+5i$ er irreducible i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$. Angiv primopløsninger i $\mathbb{Z}[i]$ for de reducible af tallene.

13. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

14. Betragt polynomiet $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$. Vis, at $g(x)$ er et irreducibelt polynomium, og vis, at $g(x)$ er det eneste irreducible polynomium af grad 2.

15. Angiv samtlige irreducible polynomier af grad 4 i $\mathbb{Z}_2[x]$.

12. december 1996/AT