Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 2AL (Ny ordning)

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 uafhængige spørgsmål, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Angiv 3 ikke-isomorfe grupper af orden 260.

2. Gør rede for, at diedergruppen D_6 ikke er isomorf med en undergruppe af den symmetriske gruppe S_4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 24$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.

4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.

5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor $\mathbb{Z}_5$ er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i $\mathbb{Z}_5$.

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_6. En permutation kaldes en *dobbelttransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_6:

$$\sigma = (2\,3\,4\,5\,6) \qquad \text{og} \qquad \tau = (1\,2\,3).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.

7. Vis ved et eksempel, at et produkt af to 3-cykler kan være en dobbelttransposition.

8. Bestem antallet af dobbelttranspositioner i S_6.

9. Gør rede for, at den mindste normale undergruppe af S_6 som indeholder τ er den alternerende gruppe A_6.

10. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ, dvs de permutationer μ i S_6, for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.

11. Vis, at en gruppe af orden 260 ikke kan være simpel.

12. Skriv tallet 50 som et produkt af irreducible elementer i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$.

13. Hvor mange forskellige perlekæder med 7 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

I de sidste 2 spørgsmål betragtes polynomierne $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ og $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$.

14. Bestem resten af $f(x)$ ved division med $g(x)$, dvs angiv det polynomium $r(x)$ af grad mindre end 2, som indgår i en fremstilling $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ i $\mathbb{Z}_2[x]$.

15. Polynomiet $g(x)$ er det eneste irreducible andengradspolynomium i $\mathbb{Z}_2[x]$ [Dette kræves ikke bevist]. Vis, at polynomiet $f(x)$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}_2[x]$.