Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 2 AL (gl. ordning)

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 4 opgaver.

Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse.

Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 50 points

I opgave 1 kan alle spørgsmålene besvares uafhængigt af hinanden.

I opgave 2 kan spørgsmålene 4 og 5 besvares uafhængigt af 1, 2 og 3 og 6 uafhængigt af de øvrige spørgsmål.

I opgave 3 kan de enkelte spørgsmål besvares uafhængigt af hinanden.

Opgave 1 (25 points)

1) Angiv 3 ikke isomorfe grupper med 260 elementer.
2) Gør rede for, at Diedergruppen D_6 ikke er isomorf med en undergruppe af S_4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 24\,.$$

3) Undersøg om $f(x)$ er irreducibel som element i $\mathbb{R}[x]$ (polynomiumsringen over de reelle tal $\mathbb{R}$).
4) Afgør om $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Z}[x]$ eller i $\mathbb{Q}[x]$.
5) Afgør om $f(x)$ er irreducibel opfattet som element i $\mathbb{F}_5[x]$. ($\mathbb{F}_5$ betegner legemet med 5 elementer).

Opgave 2 (25 points)

Lad i denne opgave R betegne ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-15}]$.

1) Vis at $3 + \sqrt{-15}$ er et irreducibelt element i R.
2) Skriv 24 som produkt af irreducible elementer på 2 væsentlig forskellige måder.

Lad I betegne idealet frembragt af elementet 24 og $\mathbb{F}_3$ legemet med 3 elementer.

3) Er R/I et integritetsområde?
4) Vis, at $R/(3)$ er isomorf med $\mathbb{F}_3[x]/(x^2)$.
5) Angiv et element $r \in R/I$ så $r \neq 0$ og $r^2 = 0$.
6) Find samtlige enheder i $\mathbb{F}_3[x]/(x^2)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (25 points)

Vi betragter den symmetriske gruppe S_6, og vi antager, at S_6 opererer på mængden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lad $p = (2\,3\,4\,5\,6)$ og $q = (1\,2\,3)$.

1) Udregn $p \circ q$ og $q \circ p$ og find ordenen af disse 2 elementer.
2) Giv et eksempel på at et produkt af to 3-cykler kan være en dobbelttransposition, dvs. produkt af 2 disjunkte transpositioner.
3) Angiv antallet af dobbelttranspositioner i S_6.
4) Vis, at den mindste normale undergruppe af S_6 som indeholder q er A_6.

Med C_p betegnes mængder af elementer, som er konjugerede med p i S_6 og $Z(p)$ betegner centralisatoren af p i S_6.

5) Find antal elementer i C_p og find samtlige elementer i $Z(p)$.

Opgave 4 (25 points)

Vi betragter legemet med p elementer, $\mathbb{F}_p$ og polynomiumsringen $\mathbb{F}_p[x]$. (p er et primtal ulig 2).

1) Gør rede for, at der findes netop en ringhomomorfi φ fra $\mathbb{F}_p[x]$ til sig selv som opfylder $\varphi(x) = x^p$ og $\varphi(a) = a$ for $a \in \mathbb{F}_p$.
2) Gør rede for, at φ er injektiv og find billedet for φ, $(\varphi(\mathbb{F}_p[x])$.
3) Undersøg om $x^{p-1} + 1$ har rødder i $\mathbb{F}_p$.
4) Vis at $x^{p-1} + 1$ er irreducibel for $p = 3$ og reducibel for $p = 5$.
5) Vis at $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$ er et legeme og angiv dets elementantal.