**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-1996**

# Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes. Sættet består af 5 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 50 points.

## **Opgave 1** (20 p.)

1° Angiv 4 ikke isomorfe abelske grupper af orden 36 og for enhver af disse den højest forekommende elementorden.

Vis, at $C_{18} \times C_2$ er isomorf med $C_9 \times C_2 \times C_2$. Her betegner $C_n$ den cykliske gruppe af orden $n$.

2° Lad $K$ være et legeme og betragt ringen $K[t]/(t^4+2)$. Afgør for $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ om $R$ er et integritetsområde.

3° Afgør om ringene $\mathbb{Q}[t]/(t^3+1)$ og $\mathbb{Q}[t]/(t^4+1)$ er isomorfe.

## **Opgave 2** (28 p.)

Betragt mængden

$$G = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q} \ .$$

(1) Vis, at der ved

$$(a,b) \circ (a_1,b_1) = (aa_1, ab_1 + ba_1)$$

defineres en komposition på $G$, som gør $(G,\circ)$ til en abelsk gruppe med $(1,0)$ som neutralt element.

(2) Vis, at der ved

$$\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

defineres en injektiv gruppehomomorfi fra $(G,\circ)$ til $GL_2(\mathbb{Q})$, hvor $GL_2(\mathbb{Q})$ betegner de invertible $2 \times 2$-matricer med rationale koefficienter.

(3) Undersøg om $\varphi(G)$ er en normal undergruppe af $GL_2(\mathbb{Q})$.

Lad $G_0$ betegne $\{(1,b) \mid b \in \mathbb{Q}\}$ som delmængde af $G$.

(4) Vis, at $G_0$ er en undergruppe af $G$.

(5) Vis, at $G_0$ er en normal undergruppe i $G$ og find faktorgruppen $G/G_0$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

## **Opgave 3** (15 p.)

Betragt ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(1) Undersøg om elementet $3+\sqrt{-7}$ er et irreducibelt element i denne ring.

(2) 16 ønskes skrevet som produkt af irreducible elementer på to væsentlig forskellige måder.

(3) Afgør om $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ er en hovedidealring.

## **Opgave 4** (20 p.)

Betragt gruppen $G = S_5$, den symmetriske gruppe af grad 5.
Lad $\tau$ og $\sigma$ være permutationer givet ved

$$\tau = (1\ 2\ 3) \qquad \sigma = (2\ 3\ 4\ 5)\ .$$

1° Find ordenen af $\tau$ og $\sigma$, samt ordenen af $\tau\sigma^2$ og $\tau\sigma\tau^{-1}$.

Vi lader $H$ betegne den mindste undergruppe af $G$, som indeholder $\tau$ og $\sigma$.

2° Vis, at $|H|$ enten er 60 eller 120.

3° Vis, at $H$ er hele $G$. Man kan uden bevis benytte, at en undergruppe af index 2 er normal.

4° Angiv en normal undergruppe i $G$ af index 2.

## **Opgave 5** (17 p.)

Betragt for ethvert primtal $p$ legemet med $p$ elementer $\mathbb{F}_p$. Endvidere betragtes polynomiet

$$f_p(t) = t^3 + t^2 + \hat{2}t + \hat{1}\ .$$

(1) Afgør for $p = 3$ og $p = 5$ om $f_p(t)$ er et irreducibelt element i $\mathbb{F}_p[t]$.

(2) Find endvidere to forskellige primtal $p_1$ og $p_2$ begge forskellige fra 3 og 5 så $f_{p_i}(t)$ $i = 1,2$ er reducibelt.

(3) Afgør om $\mathbb{F}_p[t]/(f_p(t)$ er et legeme for $p = 3$, 5, 17.

(4) Gør rede for, at der findes uendelig mange primtal, $p$, så $f_p(t)$ er et reducibelt polynomium.

Tip. Vis, at der for endelig mange primtal $p_1, \cdots p_k$ findes et $q$ ulig $p_i$'erne, så $f_q(t)$ har en rod.