Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes. Sættet består af 4 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 points. I opgave 1 kan spørgsmålene 3 og 4 besvares uafhængigt af spørgsmålene 1 og 2. I opgave 2 kan spørgsmålene 3, 4, 5 og 6 besvares uafhængigt af 1 og 2 og spørgsmål 6 uafhængigt af 3, 4 og 5. I opgave 4 kan spørgsmålene 3, 4 og 5 besvares uafhængigt af 1 og 2.

Opgave 1 (20 points)

1) Angiv samtlige ikke isomorfe abelske grupper af orden 8.
2) For enhver af disse grupper skal den højest forekommende elementorden angives.
3) Angiv en ikke abelsk gruppe med 8 elementer.
4) Vis, at enhver abelsk gruppe af orden 4 er isomorf med en undergruppe af S_4 og af S_5.

Opgave 2 (30 points)

Lad $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ betegne legemet med 5 elementer.

(1) Bestem ordenen af ethvert element i gruppen $(\mathbb{F}_5 - \{0\}, \cdot)$.

(2) Undersøg om $(\mathbb{F}_5 - \{0\}, \cdot)$ er en cyklisk gruppe og angiv i bekræftende fald samtlige frembringere for denne.

Vi betragter nu polynomiumsringen $\mathbb{F}_5[x]$ og et polynomium $f(x)$ heri givet ved

$$f(x) = x^3 + \bar{3}x^2 - x + \bar{3}\,.$$

(For $a \in \mathbb{Z}$ betegner $\bar{a}$ a's restklasse i $\mathbb{F}_5$).

(3) Vis, at $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{F}_5[x]$ og gør rede for, at $\mathbb{F}_5[x]/(f(x))$ er et legeme.

(4) Find antallet af elementer i dette legeme.

Vi betegner legemet $(\mathbb{F}_5[x]/(f(x)), +, \cdot)$ med $(L, +, \cdot)$.
$(L, +)$ er som abelsk gruppe isomorf med en direkte sum af cykliske grupper.

(5) Find disse cykliske grupper. (*Tip.* Man kan eventuelt benytte, at $5a = 0$ for alle $a \in L$).

Vi lader π betegne den kanoniske afbildning fra $\mathbb{F}_5[x]$ til L. I $\mathbb{F}_5[x]$ betragtes $p(x) = x^3 + x^2 + x + \bar{1}$.

(6) Vis, at $\pi(p(x)) \neq 0$ og at $\pi(\bar{3}x^2 + \bar{3}x)$ er $\pi(p(x))$'s inverse i $(L - \{0\}, \cdot)$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (25 points)

Lad R betegne ringen $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-13}\right]$.

1) Vis, at R ikke har noget element med norm 11.
2) Find normen af $3+\sqrt{-13}$ og afgør om dette element er irreducibelt.
3) 22 ønskes skrevet som produkt af irreducible element i R på 2 væsentlig forskellige måder.

4) Afgør om R er en euklidisk ring (Euclidean domain) og om 11 er et primelement i R.

   Er $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-13}\right]/(11)$ et integritets område ?
5) Vis, at $\mathbb{Z}[x]/(x^2+13,11)$ er isomorf med $\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+\overline{2})$ og afgør, om disse ringe er legemer, ($\overline{2}$ betegner 2's restklasse i legemet med 11 elementer, $\mathbb{F}_{11}$).

Opgave 4 (25 points)

Vi betragter den symmetriske gruppe S_5, og vi antager, at S_5 opererer på $\{1,2,3,4,5\}$.

(1) For $p=(1\,2\,3\,4)$ og $\sigma=(1\,3)$ skal man vise, at $p\sigma=\sigma p^{-1}$.

(2) Gør rede for, at S_5 indeholder en undergruppe isomorf med diedergruppen D_4.

Vi lader a,b og c betegne 3 forskellige tal i mængden $\{1,2,3,4,5\}$.

(3) Udregn $(ab)(bc)$ og $(bc)(ab)$ og vis dernæst, at for 2 forskellige transpositioner σ og τ er $\sigma\tau=\tau\sigma$ netop når σ og τ opererer på disjunkte mængder.

(4) For $p=(1\,2\,3\,4)$ ønskes antallet af elementer der er konjugerede med p, bestemt. Det ønskes vist, at centralisatoren for p har orden 4. (Anvend evt. "the Counting Formula").

(5) Vis (f.eks. ved brug af (3) og (4)), at S_5 hverken indeholder en undergruppe isomorf med $C_2\times C_2\times C_2$ eller en undergruppe isomorf med $C_4\times C_2$.