Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.
Sættet består af 5 opgaver.
Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse.
Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 points.

Opgave 1 (12 p.)

1) Vis, at der er netop 2 ikke isomorfe abelske grupper af orden 98 og angiv disse.
2) For enhver af disse grupper skal den højst forekommende elementorden angives.
3) Angiv en ikke abelsk gruppe med 98 elementer.

Opgave 2 (25 p.)

Betragt følgende mængde af matricer

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \ \text{ og } \ b \in \mathbb{C} \right\} .$$

1) Gør rede for, at R er en kommutativ delring af ringen af komplekse (2×2)-matricer.

Lad afbildningen φ fra $R[x]$ (polynomiumsringen over R) til R være givet ved

$$\varphi\left(\sum_{j=0}^{k} r_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{k} r_j \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^j .$$

2) Gør rede for, at φ er en ringhomomorfi.
3) Vis, at ker (φ) er et hovedideal i $R[x]$ og angiv en frembringer for ker (φ).
4) Gør rede for, at φ inducerer en injektiv ringhomomorfi $\overline{\varphi}$ fra $R[x]/\ker(\varphi)$ til R.
5) Er $\overline{\varphi}$ surjektiv?

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (25 p.)

Lad $\mathbb{F}_{11}$ betegne et legeme med 11 elementer. I $\mathbb{F}_{11}[t]$ betragtes polynomierne $p(t)$ og $q(t)$, hvor $p(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 3$ og $q(t) = t^2 + 1$.

1) Skriv både $p(t)$ og $q(t)$ som produkt af irreducible polynomier.
2) Find største fælles divisor $d(t)$ for $p(t)$ og $q(t)$ og find $h_1(t)$ og $h_2(t)$ så $d(t) = h_1(t)p(t) + h_2(t)q(t)$.
3) Gør rede for, at $F = \mathbb{F}_{11}[t]/(t^2+1)$ er et endeligt legeme og angiv dets elementantal.
4) Vis, at $\overline{p(t)}$ ($p(t)$'s restklasse i F) er ulig 0. Angiv $\overline{p(t)}$'s inverse i F.

Opgave 4 (25 p.)

I S_4 betragtes permutationerne p og q givet ved

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

1) Angiv ordenen og fortegnet for enhver af de fire permutationer p, q, pq og qp.
2) Find pqp og $q^{-1}pq$ og undersøg om de er konjugerede elementer i S_4.
3) Lad H være en undergruppe af S_4 som indeholder p og q. Vis, at H har ordenen 12 eller 24.
4) Vis, at den mindste undergruppe som indeholder p og q er S_4.

Man kan uden bevis benytte, at en undergruppe af index 2 er normal.

Opgave 5 (13 p.)

Betragt talringen $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

1) Skriv 18 som produkt af irreducible element på 2 væsentlig forskellige måder.
2) Afgør om 2 er irreducibel i R.
3) Afgør om 2 er et primelement i R.