Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes. Sættet består af 6 opgaver. Opgave 1, 2, 3, 4, 5 og 6a er for de studerende, der har læst efter nyt pensum. Opgave 1, 2, 3, 4, 5, og 6b er for de studerende, der har læst efter gammelt pensum. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 points. Opgaverne 1 – 6a er vedlagt i (let forkortet) engelsk version.

I sættet betegner C_n den cykliske gruppe med n elementer, tidligere noter benytter betegnelsen $\mathbb{Z}_n$.

Opgave 1 (16p)

Lad følgende 3 abelske grupper af orden 24 være givet

$$C_6 \times C_4, \quad C_2 \times C_{12} \text{ og } C_{24}.$$

1) Er nogle af disse grupper isomorfe?
2) Angiv for hver af grupperne den størst mulige orden et element kan have.
3) Angiv en abelsk gruppe med 24 elementer, som ikke er isomorf med nogle af ovennævnte grupper.
4) Angiv en ikke abelsk gruppe med 24 elementer.

Opgave 2 (20p)

Lad R betegne ringen af Gaussiske hele tal $\mathbb{Z}[i]$.

(1) Faktoriser $3+i$ i irreducible faktorer i R.

(2) Find største fælles divisor for $3+i$ og $7-7i$ i R.

(3) Lad S betegne faktorringen (residueringen) $R/(i-2)$, hvor $(i-2)$ betegner idealet frembragt af $i-2$ i R. For $a \in R$ betegnes endvidere med $\overline{a}$, a's restklasse med hensyn til $(i-2)$.

Vis, at der ved $f(h) = \overline{h}$, defineres en surjektiv ringhomomorfi fra $\mathbb{Z}$ på S.

(4) Vis, at Ker (f) er et maksimalt ideal i $\mathbb{Z}$ og find en frembringer for Ker (f).

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (16p)

Lad F betegne legemet med p elementer $F = \mathbb{F}_p$ $(\mathbb{Z}_p)$.
G betegner matricerne på formen

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in F.$$

1) Vis, at $G_0 = \{X \in G \mid \det X \neq 0\}$ udgør en gruppe med matrixmultiplikation som komposition.
2) Det ønskes vist, at $G_1 = \{X \in G_0 \mid \det X = 1\}$ udgør en normal undergruppe i G_0. Find antallet af elementer i G_1 for $p = 2$ og 3.
3) Angiv gruppestrukturen af G_0/G_1 for $p = 2$ og $p = 3$.

Opgave 4 (18p)

Betragt permutationen p_0 i den symmetriske gruppe S_{10}, hvor

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Skriv p_0 som produkt af disjunkte cykler og angiv p_0's orden.

(2) Gør rede for, at p_0 ikke er konjugeret til p_1 givet ved

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

(3) Vis, at der findes et $q \in S_{10}$ så $q^{-1} p_1 q = p_1^2$ og find et sådant q.

(4) Vis, at der findes et element af orden 30 i S_{10}.

Opgave 5 (10p)

Betragt polynomiumsringene $\mathbb{Z}[t]$ og $\mathbb{F}_5[t]$, hvor $\mathbb{F}_5$ betegner legemet med 5 elementer $(\mathbb{Z}_5)$.

(1) Undersøg om $t^2 + 1$ er irreducible i nogle af de 2 ringe.

(2) Er $\mathbb{Z}[t]/(t^2+1)$ eller $\mathbb{F}_5[t]/(t^2+1)$ et legeme?

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6a (20p)

Lad G_1 og G_2 være 2 endelige grupper.

1) Vis, at g_i er konjugeret med g_i' i G_i, $i = 1, 2$, hvis og kun hvis (g_1, g_2) konjugeret med (g_1', g_2') i $G_1 \times G_2$.
2) Angiv klasseligningen for $C_4 \times S_3$ og for S_4.
3) Vis, at diedergruppen D_{12} hverken er isomorf mod $C_4 \times S_3$ eller S_4.

   (Vink: betragt f.eks. elementer af orden 2).
4) Angiv en normal undergruppe H_1 (resp. H_2) af $C_4 \times S_3$ (resp. S_4) så faktorgruppen (kvotientgruppen) er isomorf med C_2 i begge tilfælde.

Opgave 6b (20p)

1) Vis, at $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times S_3$ er opløselig og angiv en kompositionsrække.
2) Vis, at $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times S_3$ har et element af orden 24 og angiv et sådant.
3) Gør rede for, at $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times S_3$ ikke er isomorf med $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times S_3$.
4) Giv et eksempel på 2 grupper med samme kompositions faktorer som ikke er isomorfe.

Opgavesættet fortsættes på side 4

1 (16p)

.

Let 3 abelian groups of order 24 be given

$$C_6 \times C_4, \quad C_2 \times C_{12} \text{ and } C_{24}.$$

1) Are any of these isomorphic?
2) Determine the highest order of an element for each of the groups.
3) Find an abelian group with 24 elements not isomorphic to any of the above.
4) Find a non abelian group of order 24.

2 (20p)

Let R denote the ring of Gaussian integers, $\mathbb{Z}[i]$.

(1) Factor $3+i$ into irreducible factors in R.

(2) Determine the greatest common divisor of $3+i$ and $7-7i$.

(3) The residue ring $R/(i-2)$ is denoted by S and for $a \in R$. Let $\overline{a}$ denote the residue of a in S.

Prove that the map f defined by $h \rightsquigarrow \overline{h}$ is a surjective ringhomomorphism from $\mathbb{Z}$ to S.

(4) Prove that ker (f) is a maximal ideal and determine a generator for ker (f)

3 (16p)

Let F denote the field with p elements $\mathbb{F}_p$ and let G denote the set of matrices of the form

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in F.$$

1) Prove that $G_0 = \{X \in G \mid \det X \neq 0\}$ is a group with matrixmultiplication as composition.
2) Prove that $G_1 = \{X \in G_0 \mid \det X = 1\}$ is a normal subgroup of G_0. Find the number of elements in G_1 for $p = 2$ and $p = 3$.
3) Also for $p = 2$ and 3 describe the group G_0/G_1.

4 (18p)

Let the permutation p_0 in the symmetric group S_{10} be given by

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 1. \end{pmatrix}$$

(1) Write p_0 as a product of disjoint cycles.

Opgavesættet fortsættes på side 5

(2) Prove that p_0 is not a conjugate of p_1, where $p_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 10 & 5\end{pmatrix}$

(3) Determine $q \in S_{10}$ such that $q^{-1}p_1q = p_1^2$.

(4) Find an element of order 30 in S_{10}.

5 (10p)

Consider the two rings of polynomials $\mathbb{Z}[t]$ and $\mathbb{F}_5[t]$.

(1) Is t^2+1 an irreducible element in any of the two rings.

(2) Is any of the rings $\mathbb{Z}[t]/(t^2+1)$ and $\mathbb{F}_5/(t^2+1)$ a field.

6a (20p)

Let G_1 and G_2 be 2 finite groups.

1) Prove that g_i is a conjugate of g_1' $i = 1,2$ in G_i, if and only if (g_1, g_2) is a conjugate of (g_1', g_2').

2) Find the class equations for $C_4 \times S_3$ and S_4.

3) Prove that the dihedral group D_{12} is not isomorphic to any of the two groups $C_4 \times S_3$ and S_4.

   (Hint: Consider elements of order 2).

4) Find a normal subgroup H_1 (H_2 resp.) of $C_4 \times S_3$ (S_4 resp.) such that the quotient is isomorphic to C_2 (C_2 resp.)