Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1993-1994

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 7 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse.
Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (14 p)

Lad G være en abelsk gruppe og $H = G \times G$.
Betragt delmængden

$$L = \{ (x, x^{-1}) \mid x \in G \}$$

af H.

(1) Gør rede for, at L er en undergruppe af H.

(2) Vis, at der ved

$$\varphi(x, y) = (xy^{-1}, x^{-1}y)$$

defineres en gruppeepimorfi (surjektiv homomorfi) fra H til L.

(3) Bestem ker φ, kernen for φ, og gør rede for at

$$G \cong \ker \varphi.$$

Opgave 2 (10p)

Vi betragter ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(1) Vis, at 12 ikke er et irreducibelt element i denne ring.

(2) Skriv 12 som et produkt af irreducible elementer og undersøg om fremstillingen er entydig.

Opgave 3 (12p)

Lad $K = \mathbb{Z}_7$ være legemet med 7 elementer.

(1) Bestem alle rødder i K af polynomiet

$$f(t) = t^4 + t^3 + \hat{2}t^2 - t - \hat{3} \in K[t].$$

(2) Skriv polynomiet $f(t) \in K[t]$ som et produkt af irreducible polynomier.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (12p)

Betragt matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t-1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ t & 0 & 2 \end{pmatrix} \in R_3^3,$$

hvor R er hovedidealringen $\mathbf{Q}[t]$.

Beregn en normalform og de invariante faktorer for A.

Opgave 5 (20p)

Vi minder om, at hvis H er en undergruppe i gruppen G, så er

$$N_G(H) = \{\, g \in G \mid gHg^{-1} = H \,\}$$

en undergruppe af G, kaldet H's normalisator i G. (Bevis for dette kræves ikke.)

Lad $G = S_8$ være den symmetriske gruppe af grad 8. Lad H være den mindste undergruppe af G, som indeholder elementerne

$$\pi = (1,2,3,4)(5,6,7,8)$$

og

$$\rho = (1,4)(2,3)(5,8)(6,7).$$

(1) Vis, at $|H| = 8$ og angiv alle elementer i H og deres orden. (Man kan udnytte at $\rho\pi\rho = \pi^{-1}$).

(2) Gør rede for, at hvis $\kappa \in N_G(H)$, så gælder $\kappa\pi\kappa^{-1} = \pi$ eller $\kappa\pi\kappa^{-1} = \pi^{-1}$.

(3) Lad $K = \langle \pi \rangle$. Gør rede for at

$$N_G(H) \subseteq N_G(K).$$

(4) Lad $\kappa = (1,2,3,4)$. Vis, at

$$\kappa \in N_G(K)\,, \quad \kappa \notin N_G(H).$$

Opgave 6 (10p)

I en kommutativ ring R kaldes et element $x \in R$ *nilpotent,* hvis der findes et $k \in \mathbf{N}$ så $x^k = 0$.

Lad $R = \mathbf{Z}_n$, restklasseringen modulo n, $n \in \mathbf{N}$.

(1) Vis, at hvis $n = a^l b$, hvor $a, b, l \in \mathbf{N}$, så er $\widehat{ab}$ nilpotent i R.

(2) Lad $c \in \mathbf{Z}$ være valgt, således at $\hat{c}$ er et nilpotent element i R. Lad p være et primtal. Vis

$$p \mid n \Rightarrow p \mid c.$$

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 7 (20p)

Lad R være en kommutativ ring med 1-element og P et primideal i R.

(1) Vis, at hvis $a^2 \in P$, da gælder, at $a \in P$.
Vis dernæst, at hvis der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $a^n = 0$, da er $a \in P$.

(2) Vis, at hvis $a^n = 0$ for et eller andet $n \in \mathbb{N}$, da gælder for ethvert primideal P, at $1 + a \notin P$.

Betragt dernæst ringen $\mathbb{Q}[x]/(x^5)$, hvor $\mathbb{Q}$ betegner legemet af rationale tal og (x^5) $(= \mathbb{Q}[x]x^5)$ er det mindste ideal, som indeholder x^5. Med $\hat{x}$ betegnes x's billede i $\mathbb{Q}[x]/(x^5)$ ved den naturlige homomorfi fra $\mathbb{Q}[x]$ til $\mathbb{Q}[x]/(x^5)$.

(3) Vis, at $\hat{x}^5 = 0$.

(4) Vis, at $\hat{1} + \hat{x} + \hat{x}^3$ er invertibel i $\mathbb{Q}[x]/(x^5)$.

(5) Vis til sidst, at $\mathbb{Q}[x]$-modulen

$$\mathbb{Q}[x]/(x^5)$$

ikke er fri.