Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1993

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 6 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (16p)

(1) Undersøg om grupperne $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ og $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ er isomorfe.

(2) Angiv en abelsk gruppe med 16 elementer, som ikke er isomorf med nogen af de ovenstående.

(3) Lad R være ringen af 2×2-matricer med koefficienter fra $\mathbb{Z}$.

Afgør om mængden af matricer på formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

er en undergruppe i $(R, +)$. Er den et ideal i R?

(4) Hvis $\mathbb{Q}[t]$ er polynomiumsringen over $\mathbb{Q}$ og $t^2\mathbb{Q}[t]$ idealet frembragt af t^2 ønskes det begrundet, at faktorringen $\mathbb{Q}[t]/t^2\mathbb{Q}[t]$ ikke er en integritetsring.

Opgave 2 (15p)

Lad R være en kommutativ ring med 1-element. Antag at I_1 og I_2 er 2 idealer med $I_1 \cap I_2 = 0$.

(1) Gør rede for, at $a \cdot b = 0$ for $a \in I_1$ og $b \in I_2$.

Som bekendt betegnes med $I_1 + I_2$ mængden $\{a + b\ , a \in I_1\ , b \in I_2\}$ og $I_1 \cdot I_2$ mængden af endelige summer af formen $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\ ,\ a_i \in I_1, b_i \in I_2$. Det er kendt (Mat 2AL-noterne p.39), at $I_1 + I_2$ og $I_1 \cdot I_2$ er idealer. Dette ønskes ikke bevist.

(2) Vis, at hvis yderligere $I_1 \cdot I_1 = 0$ da er $I_1 \cdot (I_1 + I_2) = 0$.

Lad endelig M_1 og M_2 være to forskellige maksimale idealer i R.

(3) Vis, at for et ideal I i R er $I \cdot (M_1 + M_2) = 0$ netop når $I = 0$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (15p)

Betragt permutationen π i den symmetriske gruppe S_7, hvor

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Skriv π som produkt af disjunkte cykler.
(2) Beregn π's fortegn og orden.
(3) Angiv 2 elementer π_1 og π_2 i S_7, som begge er forskellige fra π og med samme orden som π, således at π_1 er konjugeret til π og π_2 ikke er det.
(4) Til sidst ønskes et element ρ i S_7 angivet så $\rho\pi_1\rho^{-1} = \pi$.

Opgave 4 (18p)

Betragt hovedidealringen $\mathbf{Z}[i]$. Begrund at $(1+i)$ er et irreducibelt element. Find største fællesdivisor af $1+i$ og $1-i$ og af $1+i$ og 3.

Find en normalform og angiv de invariante faktorer for matricen

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 6 \\ 1-i & 3 & -6i \\ 4 & 3+3i & 6-6i \end{pmatrix}$$

Opgave 5 (16p)

Betragt legemet $\mathbf{Z}_3$.

(1) Undersøg hvilke af følgende 3 polynomier, der er irreducible i $\mathbf{Z}_3[t]$, polynomiumsringen over $\mathbf{Z}_3$,

$$p_1(t) = t + \hat{2}\,t^2\ , \quad p_2(t) = \hat{1} - \hat{t} + t^2 \quad \text{og} \quad p_3(t) = (\hat{1}+t)^2 + t\ .$$

(2) Afgør, hvilke af de 3 ringe $\mathbf{Z}_3[t]/p_i(t)\mathbf{Z}_3[t]$, $1 \le i \le 3$, der er legemer.
(3) Vis, at $p_2(t)$'s restklasse i $\mathbf{Z}_3[t]/\mathbf{Z}_3[t]p_3(t)$ er et invertibelt element og find det inverse element.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (20p)

Betragt ringen af hele tal $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Lad $h \in \mathbb{Z}$ være et produkt af 2 forskellige primtal p_1 og p_2.

(1) Vis, at $\mathbb{Z}$-modulerne $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z}/h^2\mathbb{Z}$ ikke er isomorfe.

(2) Vis, at den abelske gruppe $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/h^2\mathbb{Z}$ har en kompositionsrække og opskriv en sådan.

(3) Vis, at der findes en kommutativ ring R og et element $a \in R$, som ikke er invertibelt og ikke er 0, så $R/aR \simeq R/a^2R$, som R-moduler.

(4) Lad R være en integritetsring og lad a være et element i R. Vis, at hvis R/aR og R/a^2R er isomorfe som R-moduler, så er $a = 0$ eller a er invertibel.