Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1992-1993

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 7 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (16 p)

Lad M være mængden af matricer på formen

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

hvor $a, b \in \mathbf{Q}$.

(1) Vis, at M er en delring i ringen $\mathbf{Q}_2^2$ af 2×2-matricer med koefficienter fra $\mathbf{Q}$.

(2) Vis, at en matrix $A \neq 0$ i M har determinant $\neq 0$.

(3) Vis, at M er et legeme.

(4) Vis, at der ved

$$a + b\sqrt{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

defineres en isomorfi mellem $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ og M.

Opgave 2 (15 p)

Betragt permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 13 & 3 & 9 & 7 & 1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

i den symmetriske gruppe S_{13}.

(1) Skriv π, π^2 og π^3 som produkt af disjunkte cykler og beregn deres fortegn.

(2) Angiv et element $\rho \in S_{13}$, således at

$$\rho\pi\rho^{-1} = \pi^3 .$$

(3) Vis, at der for alle $k \in \mathbf{N}$ gælder

$$\rho^k \pi \rho^{-k} \in \{\pi, \pi^3\} ,$$

hvor ρ er som i (2).

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1992-1993
Matematik 2 AL

Opgave 3 (14 p)

Beregn en normalform og de invariante faktorer for $\mathbf{Z}$-matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 9 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 4 (15 p)

Lad G være en gruppe og S en relation på G, som opfylder følgende betingelser for alle $a, b, c, d \in G$.

(I) $a\,S\,b \Rightarrow a^{-1}\,S\,b^{-1}$.

(P) $a\,S\,b$ og $c\,S\,d \Rightarrow ac\,S\,bd$.

(E) $1\,S\,1$.

Sæt $N = \{a \in G | a\,S\,1\}$.

(1) Vis, at N er en undergruppe i G.

Antag nu yderligere i det følgende at S er refleksiv, altså

[BRR] $a\,S\,a$ (for alle $a \in G$).

(2) Vis, at N er en normal undergruppe i G.

(3) Vis, at der for alle $a, b \in G$ gælder

$$a\,S\,b \Leftrightarrow ab^{-1} \in N .$$

Opgave 5 (14 p)

Lad $R = \mathbf{Z}_7[t]$ være polynomiumsringen over legemet $\mathbf{Z}_7$.

(1) For hvilke $\hat{a} \in \mathbf{Z}_7$ har polynomiet $t^3 - \hat{a} \in R$ en rod i $\mathbf{Z}_7$ og for hvilke $\hat{a}$ er $t^3 - \hat{a}$ irreducibelt?

(2) Vis, at $\mathbf{Z}_7$ er et spaltningslegeme for polynomierne $t^3 - \hat{1}$ og $t^3 + \hat{1}$.

Opgave 6 (14 p)

Lad $R = \mathbf{Z}[i]$ være ringen af gaussiske hele tal. Lad $r = 1 + 4i \in R$. Lad $a, b \in \mathbf{Z}$.

(1) Vis, at $r \mid 1 + bi \Leftrightarrow b \equiv_{17} 4$.

(2) Vis, at $r \mid a + bi \Leftrightarrow b \equiv_{17} 4a$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1992-1993
Matematik 2 AL

Opgave 7 (12 p)

Lad R være en kommutativ ring med 1 element og lad $R[t]$ være polynomiumsringen over R. Vi betragter i denne opgave $R[t]$ som en R-modul (jfr. evt. (8.5) i noterne).

(1) Lad I være et ideal i ringen $R[t]$. Gør rede for, at I er en undermodul af R-modulen $R[t]$ og dermed også $R[t]/I$ en R-modul.

(2) Antag nu at $I = (f(t))$ er hovedidealet i $R[t]$ frembragt af polynomiet

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \ ,$$

hvor $f(t) \neq 0$ har højestegradkoefficient 1. Vis at R-modulen $R[t]/I$ er endeligt frembragt.