Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 7 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (15p)

Lad

$$\pi = (1,2,3,4,5) \in S_6 .$$

Sæt

$$X = \{ \rho \in S_6 \mid \rho\pi\rho^{-1} = \pi^3 \}$$
$$Y = \{ \kappa \in S_6 \mid \kappa\pi\kappa^{-1} = \pi^2 \} .$$

(1) Angiv alle elementer i X som produkt af disjunkte cykler og beregn deres fortegn.

(2) Lad $\rho \in S_6$. Vis

$$\rho \in X \Leftrightarrow \rho^{-1} \in Y .$$

Opgave 2 (12p)

Betragt delmængden

$$X = \{ -1 + 3\sqrt{-3} \, , \, 3 + 2\sqrt{-3} \, , \, 2 + \sqrt{-3} \, , \, 1 + 2\sqrt{-3} \}$$

af ringen $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(1) Bestem alle par af elementer $s, t \in X$ som opfylder $s \neq t$ og $s \mid t$.

(2) Angiv for ethvert par $s, t \in X$ med $s \neq t$ og $s \mid t$ et $k \in R$ så $t = sk$.

Opgave 3 (15p)

Lad $\mathbb{Z}_5$ være restklasseringen modulo 5, som er et legeme. Lad R være hovedidealringen $R = \mathbb{Z}_5[t]$.

(1) Vis, at polynomierne

$$f(t) = t^3 + \hat{2}t^2 + \hat{2}t + \hat{1} \in R$$
$$g(t) = t^2 + \hat{3}t + \hat{2} \in R$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

ikke er relativ prime og bestem en største fælles divisor.

(2) Bestem en normalform og de invariante faktorer for matricen $A \in R_3^2$ defineret ved

$$A = \begin{bmatrix} f(t) & t+\hat{1} & 0 \\ g(t) & 0 & t+\hat{2} \end{bmatrix}$$

Opgave 4 (15p)

Lad G være en gruppe og $H = G \times G$ det direkte produkt af G med sig selv.
Lad $g \in G$. Sæt

$$H(g) = \{\, (x, y) \in H \mid xg = gy \,\} .$$

(1) Vis, at $H(g)$ er en undergruppe i H.

(2) Vis, at der ved

$$\varphi(x) = (x, g^{-1}xg) \quad , \; x \in G$$

defineres en gruppeisomorfi mellem G og $H(g)$.

Opgave 5 (15p)

Lad $R = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ være ringen af afbildninger $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ (jfr. (3.1) (4) i noterne). For $f \in R$ lad

$$S(f) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 0 \,\} .$$

(1) Vis, at der for alle $f, g \in R$ gælder

$$S(f+g) \subseteq S(f) \cup S(g)$$
$$S(f \cdot g) = S(f) \cap S(g) .$$

Lad nu

$$I = \{\, f \in R \mid S(f) \text{ er en endelig mængde } \} .$$

(2) Vis, at I er et ideal i R.

(3) Vis, at I *ikke* er endeligt frembragt.

Opgave 6 (10p)

Lad R være en ring med 1-element.
Antag at der for alle $a, b \in R$ gælder, at $Ra \subseteq Rb$ eller $Rb \subseteq Ra$.
Lad I og J være vilkårlige venstreidealer i R.
Vis, at $I \subseteq J$ eller $J \subseteq I$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992
Matematik 2 AL

Opgave 7 (18p)

Lad R være en kommutativ ring med 1-element, M en unitær R-modul.
Lad $M^* = M \setminus \{0\}$ være mængden af elementer $\neq 0$ i M. Definer en relation $\sim$ på M^* ved

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ Der findes } r \in R \text{ så } x = ry \ .$$

(1) Vis, at $\sim$ er refleksiv og transitiv.

Antag nu yderligere at relationen $\sim$ også er symmetrisk.

(2) Lad $x \in M^*$, $r \notin \mathrm{Ann}(x)$. Vis, at der findes et $s \in R$ så $1 - sr \in \mathrm{Ann}(x)$.

(*Vink:* Man kan benytte at $rx \sim x$).

(3) Lad $x \in M^*$. Vis, at $\mathrm{Ann}(x)$ er et maksimalt ideal i R.