Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinter 1991-92

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 7 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (15p)

Lad R og S være kommutative ringe med 1-element og $\varphi, \psi : R \to S$ ringhomomorfier.

(1) Vis, at $\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi(1) = 0$.

(2) Vis, at $\varphi + \psi : R \to S$, defineret ved $(\varphi + \psi)(r) = \varphi(r) + \psi(r)$ for alle $r \in R$, er en ringhomomorfi, hvis og kun hvis:

$$\text{For alle } r, s \in R : \varphi(r)\psi(s) + \varphi(s)\psi(r) = 0$$

(3) Antag nu, at S er en integritetsring og at $1 + 1 = 2 \neq 0$ i S. Vis, at $\varphi + \psi$ er en ringhomomorfi, hvis og kun hvis $\varphi = 0$ eller $\psi = 0$.

Opgave 2 (14p)

(1) Betragt elementerne $\pi = (1,2,3,4,5,6,7)$ og $\rho = (1,7)(2,6)(3,5)$ i den symmetriske gruppe S_7. Vis, at $\rho\pi\rho = \rho\pi\rho^{-1} = \pi^{-1}$ og at $|\rho\pi^i| = 2$ for alle $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(2) Lad $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, og lad $\pi_n = (1, 2, \ldots, n) \in S_n$. Vis, at der findes et element $\rho_n \in S_n$, således at $|\rho_n| = 2$ og $\rho_n \pi_n \rho_n = \pi_n^{-1}$.

Opgave 3 (14p)

Lad $R = \mathbb{Z}_{10}$ være restklasseringen modulo 10.

(1) Angiv alle invertible elementer i R og for hvert invertibelt element dets inverse element.

(2) For $\hat{a} \in R$ lad

$$M_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{a} & \hat{1} \end{bmatrix}.$$

Angiv alle $\hat{a} \in R$ hvor $M_{\hat{a}}$ er invertibel.

(3) Beregn den inverse matrix til $M_{\hat{3}}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (14p)

Lad R være en hovedidealring, og lad $a, b \in R$ have største fælles divisor 1.

(1) Vis, at største fælles divisor af ab og $a + b$ er 1.

(2) Beregn en normalform og de invariante faktorer for matricen

$$A = \begin{bmatrix} a & b & a^2 \\ b & a & b^2 \end{bmatrix}$$

(Man kan benytte (9.19) i noterne).

Opgave 5 (14p)

Lad R være en kommutativ ring med 1-element og M en (unitær) R-modul. Sæt

$$a^*(M) = \{ r \in R \mid \text{ For alle } x \in M \text{ eksisterer } n \in \mathbb{N} \text{ så } r^n x = 0 \} .$$

(1) Vis, at $a^*(M)$ er et ideal i R.

(2) Antag, at R er en hovedidealring. Vis, at hvis $a^*(M) \neq \{ 0 \}$, så er $M = M_{\text{tor}}$.

Opgave 6 (14p)

Lad $M = \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$ og betragt delringen

$$\mathcal{P}_e(M) = \{ A \in \mathcal{P}(M) \mid A \text{ er endelig } \}$$

i potensmængderingen $\mathcal{P}(M)$. (Bevis for at $\mathcal{P}_e(M)$ er en delring kræves ikke). Betragt afbildningen

$$\alpha : \mathcal{P}_e(M) \to \mathbb{Z}_2[t]$$

givet ved $\alpha(A) = \sum_{i \in A} t^i$

(1) Vis, at α er en *gruppeisomorfi* mellem

$$(\mathcal{P}_e(M), +) \text{ og } (\mathbb{Z}_2[t], +) .$$

(2) Gør rede for, at α *ikke* er en ringisomorfi mellem $\mathcal{P}_e(M)$ og $\mathbb{Z}_2[t]$.

Opgave 7 (15p)

Lad $K = \mathbb{Z}_7$ være legemet med 7 elementer $f(t) = t^2 + \hat{1} \in K[t]$.

(1) Vis, at $f(t)$ er irreducibelt i $K[t]$.

(2) Vis, at

$$L = K[t]/K[t]f(t)$$

er et legeme med $49 = 7^2$ elementer.