Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1991

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 7 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (14p)

Lad L være et legeme og sæt

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in L\,,\, a \neq 0 \right\} .$$

(1) Vis at H er en undergruppe i $G = GL(2, L)$.

(2) Undersøg om H er en normal undergruppe i G.

(3) Antag at char $L = p > 0$. Beregn ordenen af elementet

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

for ethvert $b \in L$.

Opgave 2 (12p)

Lad R være en (ikke-kommutativ) ring og lad $a, b, e, f \in R$ opfylde

$$ab = e\,, \quad ba = f\,.$$

(1) Vis at der gælder

$$ea = af\,, \quad be = fb\,.$$

Antag yderligere at $e^2 = e$, $f^2 = f$.

(2) Vis $e = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(3) Vis at hvis $a' = eaf$, $b' = fbe$ gælder

$$a'b' = e\,, \quad b'a' = f\,.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (14p)

Lad $\rho\colon G \to S(M)$ være en operation af gruppen G på den endelige mængde M. Lad N være en anden mængde og $a\colon M \to N$ en *bijektiv* afbildning. For $g \in G$ sættes

$$\rho'(g) = a \circ \rho(g) \circ a^{-1} \quad : \quad N \to N\,.$$

(1) Vis at ρ' definerer en operation af G på N.

(2) Lad $m \in M$ og sæt $n = a(m) \in N$ (så $m = a^{-1}(n)$). Vis at

$$\mathrm{Stab}_{\rho}(m) = \mathrm{Stab}_{\rho'}(n)\,.$$

(3) Vis at hvis ρ er transitiv på M så er ρ' transitiv på N.

Opgave 4 (14p)

Beregn en normalform og de invariante faktorer for matricen

$$\begin{bmatrix} t + \hat{1} & t^2 + \hat{1} \\ t^2 + \hat{1} & t^4 + \hat{1} \end{bmatrix} \in R^2_2\,,$$

hvor R er hovedidealringen $\mathbb{Z}_2[t]$.

Opgave 5 (16p)

Betragt undergrupperne

$$\begin{aligned} H &= \{\pi \in S_6 \mid \text{ For alle } i, 1 \le i \le 3, \text{ gælder } 1 \le \pi(i) \le 3\} \\ H_1 &= S_{\{1,2,3\}} = \{\pi \in S_6 \mid \text{ For alle } i, 4 \le i \le 6, \text{ gælder } \pi(i) = i\} \\ H_2 &= S_{\{4,5,6\}} = \{\pi \in S_6 \mid \text{ For alle } i, 1 \le i \le 3, \text{ gælder } \pi(i) = i\} \end{aligned}$$

af den symmetriske gruppe S_6.

(1) Vis at H er et indre direkte produkt af H_1 og H_2.

(2) Vis at elementet $(1,4)(2,5)(3,6) \in S_6$ ligger i H's normalisator.

Opgave 6 (12p)

Lad $R = \mathbb{Z}[i]$ være ringen af gaussiske hele tal, lad $b \in \mathbb{Z}$. Vis at 1 er en største fælles divisor af $2 + 3i$ og $2 + bi$ i R, hvis og kun hvis $b \not\equiv_{13} 3$.

(Det kan være nyttigt at checke om $2 + 3i$ er et irreducibelt element i R).

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 7 (18p)

Lad $M = M_1 \oplus M_2$ være en direkte sum af R-moduler. Lad U være en undermodul af M. Sæt

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \{m_1 \in M_1 \mid \text{ Der findes } m_2 \in M_2 \text{ så } m_1 + m_2 \in U\} \\
X_2 &= \{m_2 \in M_2 \mid \text{ Der findes } m_1 \in M_1 \text{ så } m_1 + m_2 \in U\} \\
Y_i &= M_i \cap U \,, \ i = 1, 2 \,.
\end{aligned}
$$

(1) Vis at $Y_1 \subseteq X_1$ og at X_1 og Y_1 er undermoduler af M_1. (Tilsvarende er $Y_2 \subseteq X_2$ undermoduler af M_2. Bevis kræves ikke).

(2) Vis at

$$Y_1 \oplus Y_2 \subseteq U \subseteq X_1 \oplus X_2 \,.$$

(3) Lad $\bar{X}_2 = X_2/Y_2$. Når $m_1 \in X_1$, findes et $m_2 \in X_2$, så $m_1 + m_2 \in U$. Vis at der så ved

$$m_1 \longrightarrow \hat{m}_2$$

fastlægges en veldefineret modul-epimorfi fra $X_1 \to \bar{X}_2$ med Y_1 som kerne, således at

$$X_1/Y_1 \simeq X_2/Y_2 \,.$$