Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990–91

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 7 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse.
Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (15p.)

Lad R være en kommutativ ring, M og N R-moduler og

$$\varphi\colon M \to N$$

en R-modul homomorfi. Lad $a, b \in R$.

Sæt

$$\ker_a \varphi = \{m \in M \mid \varphi(am) = 0\} .$$

(1) Vis, at $\ker_a \varphi$ er en undermodul af M som indeholder $\ker \varphi$.

(2) Vis, at hvis $b \mid a$ gælder $\ker_b \varphi \subseteq \ker_a \varphi$.

(3) Lad nu $K = \ker \varphi$ og betragt homomorfien $\hat{\varphi}\colon M/K \to N$ givet ved $\hat{\varphi}(\hat{m}) = \varphi(m)$. Undersøg om der gælder

$$\ker_a \hat{\varphi} = \ker_a \varphi / K .$$

Opgave 2 (12p.)

Lad K være legemet $\mathbb{Z}_{11}$ og lad

$$f(t) = t^3 + \hat{1} \in K[t] .$$

(1) Beregn alle rødder for $f(t)$ i K.

(2) Afgør om K er et spaltningslegeme for $f(t)$ over K.

Opgave 3 (14p.)

(1) Beregn en største fælles divisor af $(11 + 3i)$ og $(3 + 2i)$ i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z}[i]$.

(2) Undersøg om elementet $1 + 3\sqrt{-3}$ er irreducibelt i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (15p.)

Lad G være en gruppe, $x \in G$.
Sæt

$$C_G^*(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} \in \{x, x^{-1}\}\} .$$

(1) Vis, at $C_G^*(x)$ er en undergruppe i G.
(2) Vis, at $C_G(x)$, centralisatoren af x i G, er en undergruppe af index højst 2 i $C_G^*(x)$.
(3) Betragt $\pi = (1,2,3,4) \in S_n$, $n \geq 4$.
Vis, at

$$C_{S_n}(\pi) \neq C_{S_n}^*(\pi) .$$

Opgave 5 (12p.)

Beregn en normalform og de invariante faktorer for $\mathbb{Z}$-matricen

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -4 & -3 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Opgave 6 (15p.)

Lad L være et legeme af karakteristik 3 og

$$H(L) = \{(a, b) \mid a, b \in L,\ a \neq 0\}$$

være gruppen med kompositionen

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b) .$$

(jfr. øvelse (6.4)).
(1) Vis, at der ved

$$\varphi(a, b) = (a^3, b^3)$$

defineres en gruppemonomorfi $H(L) \to H(L)$.
(2) Vis, at hvis L er endelig, er φ en automorfi af $H(L)$.
(3) Beskriv φ i tilfældet hvor $L = \mathbb{Z}_3$.
(Bevis for at $H(L)$ er en gruppe kræves IKKE!)

Opgavesættet fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990–91
Matematik 2 AL

Opgave 7 (17p.)

Lad R være en kommutativ ring med 1-element, I et ideal i R.
Sæt

$$I^* = \{r \in R \mid \text{Der findes } n \in \mathbb{N} \text{ så } r^n \in I\}\ .$$

(1) Vis, at I^* er et ideal i R, som indeholder I.

(2) Vis, at $(I^*)^* = I^*$.

(3) Beregn I^* i det tilfælde, hvor $R = \mathbb{Z}$, $I = 50\mathbb{Z}$.