Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1990

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 7 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (14p)

Lad I og J være idealer i en (ikke-kommutativ) ring R. Antag:

For alle $a_1, a_2 \in I$ gælder $a_1 a_2 = 0$.

For alle $b_1, b_2 \in J$ gælder $b_1 b_2 = 0$.

Lad K være idealet $K = I + J$. Vis

(1) For alle $c_1, c_2, c_3 \in K$ gælder $c_1 c_2 c_3 = 0$.

(2) Hvis yderligere $I \cap J = \{0\}$, gælder $c_1 c_2 = 0$ for alle $c_1, c_2 \in K$.

Opgave 2 (12p)

Lad R være restklasseringen $\mathbb{Z}_{12}$. For $\hat{a} \in R$ defineres

$$M_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{a} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in R_3^3 .$$

(1) For hvilke $\hat{a} \in R$ er $M_{\hat{a}}$ invertibel?

(2) Beregn den inverse matrix til $M_{\hat{4}}$.

Opgave 3 (15p)

Lad $\pi = (1,2,3)(4,5)$ og $\kappa = (1,3,5)(2,4) \in S_5$. Lad

$$X = \{\rho \in S_5 \mid \rho\pi\rho^{-1} = \kappa\}$$

(1) Beregn alle elementer i X og angiv for hvert element i X dets fortegn.

(2) Vis at X er en venstresideklasse til undergruppen $C_{S_5}(\pi)$ af S_5.

(3) Findes der en undergruppe af S_5, således at X er en højresideklasse til denne?

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (14p)

Lad R være en ring og $M = R^{\mathbb{N}}$ mængden af afbildninger $f : \mathbb{N} \to R$, betragtet som R-modul.

[Altså: For $f, g \in M$, $r \in R$ er

$$\text{For alle } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} (f+g)(n) = f(n) + g(n) \\ (rf)(n) = rf(n)\,. \end{cases} \quad]$$

Lad $a \in \mathbb{N}$ og lad $\varphi_a : M \to M$ være defineret ved:

$$\text{For alle } n \in \mathbb{N} : \ (\varphi_a(f))(n) = f(a+n) - f(n)\,.$$

(1) Vis, at φ_a er en R-modul-*epimorfi*.

(2) Vis, at for $a = 2$ er $R^2 \simeq \ker \varphi_2$ som R-moduler.

Opgave 5 (15p)

Beregn en normalform og de invariante faktorer for $\mathbb{Z}$-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & -3 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4_4\,.$$

Opgave 6 (14p)

Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad G være en cyklisk gruppe af orden n.

(1) Lad p være et primtal så $p \mid n$.
Vis at G indeholder netop $p-1$ elementer af orden p.

(2) Lad $n = 50$. Beregn antallet af elementer af orden 25 og af orden 50 i G.

Opgave 7 (16p)

Lad K være et legeme og $\nu : K \to \mathbb{R}$ en afbildning, der opfylder:

(i) For alle $a \in K : \nu(a) \geq 0\,,\ \nu(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(ii) For alle $a, b \in K : \nu(ab) = \nu(a)\nu(b)$.

(iii) For alle $a, b \in K : \nu(a+b) \leq \max(\nu(a), \nu(b))$.

Opgave 7 fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1990
Matematik 2 AL

Vis:

(1) $\nu(1) = 1$, $\nu(-a) = \nu(a)$, $\nu(a^{-1}) = \nu(a)^{-1}$ for alle $a \in K \setminus \{0\}$.

(2) $R = \{a \in K \mid \nu(a) \leq 1\}$ er en delring af K.

(3) $M = \{a \in K \mid \nu(a) < 1\}$ er et ideal i R.

(4) Hvis $I \neq R$ er et ideal i R, gælder $I \subseteq M$.