Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1989-1990

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 8 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (12p.)

Lad R være hovedidealringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

(1) Angiv alle elementer af norm 22 i R.

(2) Beregn en største fælles divisor af $10 + 7\sqrt{-2}$ og $5 + 9\sqrt{-2}$ i R.

Opgave 2 (14p.)

Lad G være en gruppe af orden $|G| = 91 = 7 \cdot 13$.

(1) Vis at G har netop én 13-Sylow gruppe og netop én 7-Sylow gruppe.

(2) Vis at G er cyklisk.

(3) Beregn for $n = 7, 13$ og 91 antallet af elementer af orden n i G.

Opgave 3 (18p.)

Lad M være en unitær R-modul. Lad $f : M \to M$ være en R-modul homomorfi. Lad for $i \in \mathbb{N}$ $f^i = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (f sammensat med sig selv i gange) og sæt

$$K_i = \ker f^i\,, \quad \text{kernen af } f^i$$
$$B_i = f^i(M)\,, \quad \text{billedet af } f^i$$

(1) Vis at $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_m \subseteq \ldots$.

(2) Vis at $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_m \supseteq \ldots$.

Antag nu yderligere, at der eksisterer et $n \in \mathbb{N}$, så $B_i = B_n$ for alle $i \geq n$ og $K_i = K_n$ for alle $i \geq n$.

(3) Vis at $B_n \cap K_n = \{0\}$.

(4) Vis at $M = K_n \oplus B_n$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (14p.)

Betragt undergruppen

$$B = <(1,2,3)> \times <(4,5,6)> \times <(7,8,9)>$$

af orden 27 i den symmetriske gruppe S_9.

Lad $\pi = (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \in S_9$.

(1) Vis at $\pi \in N_{S_9}(B)$, B's normalisator i S_9.

(2) Vis at $<\pi> \cap B = \{(1)\}$.

(3) Vis at $P = B<\pi>$ er en undergruppe af orden 81 i S_9.

(4) Er P en 3-Sylow gruppe i S_9 ?

Opgave 5 (10p.)

Lad R være restklasseringen $\mathbb{Z}_{12}$ og lad

$$f(t) = t^3 - \hat{2}t^2 + \hat{5}t - \hat{4} \in R[t]\,.$$

(1) Bestem alle rødder for $f(t)$ i R.

(2) Bestem elementer $a, b, c \in \mathbb{Z}$ så $f(t) = (t-\hat{a})(t-\hat{b})(t-\hat{c})$.

Opgave 6 (12p.)

Lad R være en kommutativ ring med 1-element.
Sæt

$$U(R) = \{u \in R \mid u \text{ invertibel}\}$$

så $U(R)$ er en abelsk gruppe med R's multiplikation som komposition (Bevis kræves ikke).

Når I er et ideal i R sættes

$$U(R,I) = \{u \in U(R) \mid \quad u \equiv_I 1\}\,.$$

(1) Vis at $U(R,I)$ er en undergruppe af $U(R)$ og beskriv specielt $U(R,R)$ og $U(R,\{0\})$.

(2) Vis at der ved $\varphi(u) = \hat{u}(= u + I)$ defineres en gruppehomomorfi fra $U(R)$ til $U(R/I)$.

(3) Bestem $\ker \varphi$.

(4) Bestem $U(R)$, $U(R,I)$ og $U(R/I)$ i tilfældet hvor $R = \mathbb{Z}$, $I = 5\mathbb{Z}$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 7 (10p.)

Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad $R = \mathbb{Z}_n$ være restklasseringen modulo n. Lad

$$M = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix} \in R_3^3 .$$

(1) For hvilke $n \in \mathbb{N}$ er M invertibel?

(2) Beregn M^{-1} i tilfældet hvor $n = 5$.

Opgave 8 (10p.)

Lad $\mathbb{Z}_{1/2} = \{\frac{n}{2} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}\,,\ n \text{ ulige}\}$.
Lad

$$R = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \cup \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}_{1/2}\} .$$

(1) Vis at R er en delring af $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$.

(2) Er $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ et ideal i R ?