Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommer 1989

Matematik 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Sættet består af 8 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal opgivet for korrekt besvarelse. Prøven er bestået ved opnåelse af mindst 55 point.

Opgave 1 (12p)

Lad $\pi = (1,2,3,4) \in S_6$.

(1) Angiv alle elementer i $H = C_{S_6}(\pi)$, π's centralisator i S_6.

(2) Beregn $\operatorname{sign}(\rho)$ for alle $\rho \in H$.

(3) Find et element $\mu \in S_6$ således at $\mu\pi\mu^{-1} = \pi^{-1}$.

Opgave 2 (14p)

Lad $R = \mathbb{Z}_8$ være restklasseringen modulo 8.

(1) Angiv alle invertible elementer i R.

(2) Lad for $\hat{a} \in R$

$$M_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{bmatrix}$$

Vis: $\hat{a}$ invertibel i $R \Leftrightarrow M_{\hat{a}}$ invertibel i R^2_2.

(3) Beregn den inverse matrix til $M_{\hat{3}}$.

Opgave 3 (10p)

Lad $X = \{1,2,3,4\}$ og lad $R = \mathcal{P}(X)$ være potensmængderingen.
Lad $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{4\} \in R$.

(1) Vis at polynomierne

$$f(t) = At^2 + Bt + C \quad \text{og} \quad g(t) = (A+B)t + C$$

i $R[t]$ har de samme rødder i R.

(2) Bestem alle rødder for $g(t)$ i R.

Opgavesættet fortsættes på side 2 .

Opgave 4 (12p)

Betragt følgende mængde

$$G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\ \ a \neq 0 \ \text{ og } \ a+b \neq 0\}.$$

(1) Vis at der ved
$$(a,b) * (c,d) = (ac\,,\ ad + bc + bd)$$
defineres en komposition på G.

(2) Vis at G med denne komposition er en abelsk gruppe.

(3) Lad $H = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ og betragt H som en gruppe ved koordinatvis multiplikation. Vis at afbildningen
$\varphi : H \to G$ defineret ved
$\varphi(x,y) = (x, y-x)$
er en isomorfi.

Opgave 5 (12p)

Lad L_1 være et spaltningslegeme for polynomiet $p(t) = t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$. Det er vist i noterne, at $|L_1| = 4$. (Redegørelse kræves ikke).
Lad l være en rod for $p(t)$ i L_1.

(1) Vis, at l også er rod i $q(t) = t^4 + t^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$.

(2) Vis, at L_1 er et spaltningslegeme for $q(t)$.

Opgave 6 (16p)

Lad M være en unitær R-modul over den kommutative ring R med 1-element.
Lad $\varphi : M \to M$ være en modul homomorfi som opfylder $\varphi^2 = Id_M$ (altså $\varphi(\varphi(x)) = x$ for alle $x \in M$). Sæt

$$M^+ = \{x \in M \mid \varphi(x) = x\}$$
$$M^- = \{x \in M \mid \varphi(x) = -x\}.$$

Vis

(1) M^+ og M^- er undermoduler i M.

(2) For alle $x \in M$ er $x + \varphi(x) \in M^+$ og $x - \varphi(x) \in M^-$.

Opgave 6 fortsættes på side 3

Antag nu yderligere, at der findes et element $a \in R$ således at $a + a = 1$, altså $2a = 1$. (Man kan tænke på a som "$\frac{1}{2}$").
Vis

(3) $M^+ \cap M^- = \{0\}$.

(4) $M = M^+ \oplus M^-$.

Opgave 7 (12p)

Lad G være en endelig gruppe af orden $|G| = 56$. Vis

(1) $m_7(G) \in \{1, 8\}$.

(2) Hvis $m_7(G) = 8$, indeholder G højst 8 elementer af 2-potens orden.

(3) Hvis $m_7(G) = 8$, er $m_2(G) = 1$.

Opgave 8 (12p)

Beregn 2 essentielt forskellige faktoriseringer af 15 som produkt af irreducible elementer i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$.