**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1988–89**

# MATEMATIK 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.
Til fuld besvarelse kræves, at 12 af nedenstående 16 delspørgsmål er korrekt besvaret.

## Opgave 1

Lad $(a_1, \dots, a_n)$ være et sæt af $n$ forskellige elementer i en kommutativ ring $R$, og lad $f$ betegne polynomiet

$$f := (X - a_1) \cdots (X - a_n) \in R[X].$$

Lad endvidere $R^n$ betegne ringen af alle $n$-sæt $(x_1, \dots, x_n)$, hvor $x_i \in R$, med koordinatvis addition og multiplikation.

(1) Vis, at afbildningen
$$p \mapsto \big(p(a_1), \dots, p(a_n)\big)$$
er en ringhomomorfi $R[X] \to R^n$, og at denne ringhomomorfi inducerer en ringhomomorfi $\Phi\colon R[X]/(f) \to R^n$ fra kvotienten.

(2) Vis, at hvis $R$ er et integritetsområde, så er $\Phi$ injektiv.

(3) Vis, at hvis $R$ er et legeme, så er $\Phi$ en isomorfi.

(4) Vis, når $R = \mathbf{Z}$, $n = 2$ og $(a_1, a_2) = (1, -1)$, at billedet for $\Phi$ består af de par $(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2$ for hvilke $x_1 + x_2 \equiv 0 \pmod 2$.

## Opgave 2

For $n \geq 2$ kan den såkaldte *diedergruppe* $D_n$ af grad $n$ beskrives på følgende måde: Der findes i $D_n$ et element $\zeta$ af orden $n$ og et element $\tau \neq \zeta$ af orden 2, så at $\zeta\tau = \tau\zeta^{-1}$, og så at den eneste undergruppe, der indeholder både $\zeta$ og $\tau$, er hele $D_n$.

(1) Vis, at diedergruppen $D_n$ har orden $2n$ og at alle diedergrupper af grad $n$ er isomorfe.

(2) Lad $X$ betegne den komplekse talplan, og lad $\tau$ og $\zeta$ betegne afbildningerne bestemt ved
$$\tau(z) = \bar{z} \qquad \text{og} \qquad \zeta(z) = e^{2\pi i/n} z.$$
Vis, at $\tau$ og $\zeta$ er bijektive afbildninger, og at den mindste undergruppe af $\mathrm{Aut}(X)$, som indeholder $\zeta$ og $\tau$, er isomorf med diedergruppen $D_n$.

(3) I den symmetriske gruppe $S_n$ betegnes med $\zeta$ $n$-cyklen $\zeta := (1, 2, \dots, n)$ og med $\tau$ permutationen bestemt ved $\tau(x) := n - x + 1$. Vis, at den mindste undergruppe af $S_n$, som indeholder $\zeta$ og $\tau$, er isomorf med diedergruppen $D_n$.

(4) Vis, at gruppen $\mathrm{Aff}_0(\mathbf{Z}/n)$ defineret i opgave 3 er isomorf med diedergruppen $D_n$.


Opgavesættet fortsættes på side 2

## Opgave 3

Lad $R$ være en kommutativ ring. Med $\operatorname{Aff}(R)$ betegnes følgende delmængde af $\operatorname{Mat}_2(R)$:

$$\operatorname{Aff}(R) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in R^* \wedge b \in R \right\}.$$

(1) Vis, at $\operatorname{Aff}(R)$ er en undergruppe i den generelle lineære gruppe $GL_2(R)$. Vis videre, at determinanten ved restriktion definerer en surjektiv gruppehomomorfi $f\colon \operatorname{Aff}(R) \to R^*$. Vis endelig, at kernen for $f$ er en normal undergruppe isomorf med den additive gruppe $(R, +)$.

(2) Med $\operatorname{Aff}_0(R)$ betegnes følgende delmængde af $\operatorname{Aff}(R)$:

$$\operatorname{Aff}_0(R) := \{\, \alpha \mid f(\alpha) = \pm 1\}.$$

Vis, at $\operatorname{Aff}_0(R)$ er en normal undergruppe i $\operatorname{Aff}(R)$. Under hvilke betingelser om $R$ gælder, at gruppen $\operatorname{Aff}_0(R)$ er kommutativ?

(3) For en matrix $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\operatorname{Aff}(R)$ og og et element $x$ i $R$ sættes

$$(*) \qquad\qquad g.x := ax + b.$$

Vis, at der ved $(*)$ defineres en virkning af gruppen $\operatorname{Aff}(R)$ på mængden $R$. Vis videre, at den tilhørende repræsentation $\operatorname{Aff}(R) \to \operatorname{Aut}(R)$ er tro.

(4) Vis for $n \geq 1$, at gruppen $\operatorname{Aff}(\mathbf{Z}/n)$ er isomorf med en undergruppe i den symmetriske gruppe $S_n$. Hvilken orden har gruppen $\operatorname{Aff}(\mathbf{Z}/n)$?

(5) Som bekendt findes der et legeme $\mathbf{F}_4$, der har præcis 4 elementer. Vis, at gruppen $\operatorname{Aff}(\mathbf{F}_4)$ er isomorf med den alternerende gruppe $A_4$.

## Opgave 4

(1) Angiv i Gauss' talring $\mathbf{Z}[i]$ samtlige elementer, der har norm 13. Bestem endvidere primopløsningen af tallet $7 + 9i$.
(2) Bestem et normeret polynomium $f$ i $\mathbf{F}_2[X]$ således at kvotientringen $\mathbf{F}_2[X]/(f)$ er et legeme med 4 elementer.
(3) I matricen

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbf{F}_5),$$

hvor $a \in \mathbf{F}_5$, fortolkes tallene som restklasser modolo 5. For hvilke værdier af $a \in \mathbf{F}_5$ er $M_a$ invertibel?