Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1988

MATEMATIK 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.
Til fuld besvarelse kræves, at 15 af nedenstående 21 delspørgsmål er korrekt besvaret.

Opgave 1

Lad R være en kommutativ ring i hvilken der er givet en involutorisk ring-automorfi $x \mapsto x'$. (Afbildningen $x \mapsto x'$ er altså en bijektiv ringhomomorfi : $R \to R$, og $x'' = x$ for alle x i R.) For en matrix $\alpha \in Mat_n(R)$ betegnes med α^* matricen defineret ved at $\alpha^*_{ij} := (\alpha_{ji})'$ for $i, j = 1, \ldots, n$. Matricen α^* fås altså ved at anvende automorfien $x \mapsto x'$ på alle elementer i den til α hørende transponerede matrix. Videre betegnes med $U_n(R)$ delmængden

$$U_n(R) := \{\alpha \in Mat_n(R) \mid \alpha\alpha^* = 1_n\},$$

og vi sætter $SU_n(R) := \{\, \alpha \in U_n(R) \mid \det \alpha = 1\}$.

(1) Vis, at $U_n(R)$ er en undergruppe i den generelle lineære gruppe $GL_n(R)$, og at $(\det \alpha)(\det \alpha)' = 1$, når $\alpha \in U_n(R)$.
(2) Øjensynlig er $U_1(R) = \{u \in R \mid uu' = 1\}$. Vis, at der for hvert element $u \in U_1(R)$ findes en matrix $\alpha \in U_n(R)$, så at $\det \alpha = u$.
(3) Vis, at $SU_n(R)$ er en normal undergruppe i $U_n(R)$, og vis, at der findes en isomorfi af grupper : $U_n(R)/SU_n(R) \xrightarrow{\sim} U_1(R)$.
(4) Vis for $a, b, c, d \in R$, at

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_2(R) \iff \begin{cases} aa' + bb' = 1 \\ cc' + dd' = 1 \\ ca' + db' = 0. \end{cases}$$

(5) Vis, at

$$SU_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in R, \quad aa' + bb' = 1 \right\}.$$

(6) Vis, når $R = \mathbf{Z}[i]$ er Gauss' talring med sædvanlig konjugering som involutorisk automorfi, at $SU_2(R)$ er en gruppe af orden 8.
(7) Bestem, når R er som i (6), ordenen af gruppen $U_2(R)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

Lad ξ være en irrational rod i polynomiet $f = X^2 + bX + c$, hvor koefficienterne b, c er hele tal, og lad $R = \mathbf{Z}[\xi]$ være den tilhørende kvadratiske talring. Lad videre p være et primtal og lad $f_p \in \mathbf{F}_p[X]$ betegne det polynomium, der fås af f ved at erstatte koefficienterne med deres restklasser modulo p.

(1) Vis, at kvotientringen R/pR har karakteristik p.
(2) Lad $\hat{\xi} \in R/pR$ betegne ækvivalensklassen, der indeholder ξ. Vis, at hvert element i R/pR har formen $r_0 + r_1\hat{\xi}$, hvor r_0, r_1 er entydigt bestemte elementer i $\mathbf{F}_p$.
(3) Vis, at $|R/pR| = p^2$.
(4) Vis, at der findes en isomorfi af ringe : $\mathbf{F}_p[X]/(f_p) \xrightarrow{\sim} R/pR$.
(5) Vis, at primtallet p er et primelement i R, hvis og kun hvis polynomiet f_p er et primelement i $\mathbf{F}_p[X]$.
(6) Angiv, når ξ er rod i $f = X^2 - X - 1$, hvilke af primtallene 2, 7 og 11, der er primelementer i $R = \mathbf{Z}[\xi]$.
(7) Angiv et primelement i den kvadratiske talring $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{17}}{2}]$.

Opgave 3

Et element λ i en ring Λ kaldes som bekendt *involutorisk*, hvis $\lambda^2 = 1$. Et-elementet 1 i Λ og dets modsatte -1 er de *trivielle involutoriske* elementer i Λ.

(1) Vis, at hvis $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ er et produkt af ringe med koordinatvise kompositioner, så er $(1, -1) \in \Lambda$ et involutorisk element. Under hvilke forudsætninger om Λ_1 og Λ_2 gælder, at $(1, -1)$ er et ikke-trivielt involutorisk element i Λ ?

I det følgende betegner R et hovedidealområde, og f er et element i R, som ikke er 0 eller en enhed. Endvidere sættes $2_R := 1_R + 1_R$.

(2) Lad $f = p$ være et primelement. Vis, at kvotienten $R/(f)$ kun har trivielle involutoriske elementer.
(3) Vis, at hvis et primelement p i R er divisor i et produkt $(1-x)(1+x)$, hvor $x \in R$, og p ikke er divisor i 2_R, så er p divisor i netop én af faktorerne.
(4) Lad $f = p^n$ være en potens af et primelement p, hvor p ikke er divisor i 2_R. Vis, at kvotienten $R/(f)$ kun har trivielle involutoriske elementer.
(5) Lad $f = up_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ være et produkt, hvor u er en enhed og $p_1, \ldots, p_r$ er primelementer, der ikke er divisorer i 2_R og parvis ikke er associerede. Vis, at kvotienten $R/(f)$ indeholder et ikke-trivielt involutorisk element, hvis og kun hvis $r > 1$. [Vink: Brug eventuelt den kinesiske restklassesætning.]
(6) Lad $f \in \mathbf{C}[X]$ være et polynomium af grad ≥ 1. Vis, at alle involutoriske elementer i kvotienten $\mathbf{C}[X]/(f)$ er trivielle, hvis og kun hvis f har præcis én rod i $\mathbf{C}$.
(7) Angiv et helt tal, hvis restklasse modulo 119 er et ikke-trivielt involutorisk element i kvotienten $\mathbf{Z}/(119)$.