Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1987–88

MATEMATIK 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.
Til fuld besvarelse af opgavesættet kræves 3 af nedenstående 4 opgaver korrekt besvaret.

Opgave 1

Lad R være en kommutativ ring og lad $a = (a_1, \dots, a_d) \in R^d$ være et d-sæt, hvor $d \geq 2$. Sættet kaldes *unimodulært*, hvis der findes d-sæt $(x_{i1} \dots, x_{id})$ i R^d for $i = 2, \dots, d$, så at matricen

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_d \\ x_{21} & \dots & x_{2d} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{d1} & \dots & x_{dd} \end{pmatrix}$$

har determinant 1.

(1) Vis, at alle rækker i en invertibel $d \times d$ matrix i $\mathrm{Mat}_d(R)$ er unimodulære.
(2) Vis, at hvis $(a_1, \dots, a_d) \in R^d$ er et unimodulært d-sæt, så findes skalarer $z_1, \dots, z_d$ i R, så at $z_1 a_1 + \dots + z_d a_d = 1$.

I det følgende antages, at R er et hovedidealområde og at der findes skalarer $z_1, \dots, z_d$ i R, så at $z_1 a_1 + \dots + z_d a_d = 1$. Med $f_a : R^d \to R$ betegnes den lineære afbildning, der på den kanoniske basis $(\delta_1 \dots, \delta_d)$ for R^d er bestemt ved $f_a(\delta_i) = a_i$ for $i = 1, \dots, d$.

(3) Vis, at f_a er surjektiv, og vis, at der findes en basis $e_1, \dots, e_d$ for R^d, så at $f_a(e_1) = 1$ og $f_a(e_i) = 0$ for $i = 2, \dots, d$.
(4) Vis, at sættet $a = (a_1, \dots, a_d)$ er unimodulært.

Opgave 2

Lad X være en endelig mængde med de $2n$ elementer $x_1, x_1', x_2, x_2' \dots, x_n, x_n'$. Lad X_i for $i = 1, 2, \dots, n$ betegne delmængden $X_i = \{x_i, x_i'\}$ af X. Lad endelig $\tau \in Aut(X)$ betegne permutationen

$$\tau := (x_1, x_1')(x_2, x_2') \cdots (x_n, x_n').$$

(1) Vis, at antallet af de permutationer i $Aut(X) = S_{2n}$, der har samme cykeltype som permutationen τ, er $(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$.
(2) Vis, at centralisatoren $C := C(\tau) = Cent(\tau)$ er en undergruppe af orden $2^n n!$.
(3) Vis, at hvert element $\sigma \in C$ permuterer mængderne $X_1, \dots, X_n$ og gør rede for, at der herved defineres en gruppehomomorfi $\rho : C \to S_n$.
(4) Vis, at homomorfien ρ er surjektiv og bestem dens kerne.
(5) Angiv en undergruppe af orden 2^3 i S_4 og en undergruppe af orden 2^7 i S_8.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

En ring R kaldes en *Boole'sk ring*, hvis den er kommutativ og alle elementer e i R er idempotente, dvs. opfylder, at $e^2 = e$. I det følgende betegner R en Boole'sk ring, e og f betegner elementer i R og vi sætter $e \cup f := e + f - ef$ og $e \cap f := ef$. Et element a i R kaldes et *atom*, hvis $a \neq 0$ og $Ra = \{0, a\}$.

(1) Vis, at hvis $f \in Re$, så er $ef = f$, og vis, at hvis $Re = Rf$, så er $e = f$.
(2) Vis, at $Re + Rf = R(e \cup f)$ og $Re \cap Rf = R(e \cap f)$.
(3) Vis, at hvis $f \in Re$, så er $Re = Rf + R(e - f)$ og $Rf \cap R(e - f) = (0)$.
(4) Vis, at produktet af to forskellige atomer altid er 0 og vis, at hvis $f = a_1 + \cdots + a_r$ er en sum af forskellige atomer $a_1, \ldots, a_r$, så vil hvert atom a_i tilhøre idealet Rf.

I det følgende antages desuden, at ringen R er endelig. Med A betegnes mængden af atomer i R og med $\alpha(e)$ betegnes mængden af atomer i idealet Re.

(5) Vis, at hvert ideal i R er et hovedideal.
(6) Vis, at hvis $e \neq 0$, så er $\alpha(e) \neq \emptyset$.
(7) Vis, at hvis $a_1, \ldots, a_r$ er de forskellige atomer i $\alpha(e)$, så er $e = a_1 + \cdots + a_r$.
(8) Vis, at $e \mapsto \alpha(e)$ er en isomorfi

$$\alpha : (R, \cup, \cap) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}(A), \cup, \cap),$$

hvor $\cup$ og $\cap$ på højresiden betegner foreningsmængde og fællesmængde.

Opgave 4

(1) Lad f være polynomiet

$$f = X^3 + 2X^2 + X + 4 \in \mathbf{F}_7[X],$$

hvor koefficienterne fortolkes som elementer i restklasseringen $\mathbf{Z}/7 = \mathbf{F}_7$. Hvad kan du sige om kvotienten $\mathbf{F}_7[X]/(f)$?
(2) Lad α være matricen

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{F}_{11}),$$

hvor koefficienterne fortolkes som elementer i restklasseringen $\mathbf{Z}/11 = \mathbf{F}_{11}$. Vis, at matricen α er invertibel og bestem matricen α^{-1}.