**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1987**

# MATEMATIK 2 AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.
Til fuld besvarelse af opgavesættet kræves 3 af nedenstående 4 opgaver korrekt besvaret.

## Opgave 1

Et element $\lambda$ i en ring $\Lambda$ siges som bekendt at være nilpotent, hvis der findes et naturligt tal $n$, så at $\lambda^n = 0$. Ringen $\Lambda$ siges at være *uden nilpotente elementer*, hvis nul-elementet 0 er det eneste nilpotente element i $\Lambda$.

(1) Vis, at ringen $\Lambda$ er uden nilpotente elementer, hvis og kun hvis der for alle elementer $\lambda$ i $\Lambda$ gælder
$$\lambda^2 = 0 \implies \lambda = 0.$$

(2) Lad $R$ være en faktoriel ring, og lad $f \notin \{0\} \cup R^*$ være et element i $R$. Lad $f = up_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ være primopløsningen af $f$, hvor altså $u$ er en enhed, $p_1, \dots, p_r$ er forskellige primelementer i $R$ og $n_1, \dots, n_r$ er naturlige tal. Vis, at kvotientringen $R/(f)$ er uden nilpotente elementer, hvis og kun hvis $n_1 = \cdots = n_r = 1$.

(3) Lad $f \in \mathbf{C}[X]$ være et polynomium med komplekse koefficienter af grad $\geq 1$. Vis, at kvotientringen $\mathbf{C}[X]/(f)$ er uden nilpotente elementer, hvis og kun hvis $f$ ikke har multiple rødder.

(4) Angiv i ringen $\mathbf{F}_2[X]/(X^4 + X^2 + 1)$ et nilpotent element forskelligt fra nulelementet.

## Opgave 2

Lad $G$ være en gruppe, der virker på en mængde $X$. En relation $R$ i $X$ siges at *harmonere med virkningen*, hvis der for alle $x, x' \in X$ og alle $g \in G$ gælder: $x\,R\,x' \implies g.x\,R\,g.x'$. Lad $Y$ være endnu en mængde, hvorpå $G$ virker. En afbildning $\psi\colon X \to Y$ siges da at være en *$G$-afbildning*, hvis der for alle $x \in X$ og $g \in G$ gælder: $\psi(g.x) = g.\psi(x)$.

(1) Lad $\psi\colon X \to Y$ være en $G$-afbildning. Vis, at den til $\psi$ hørende ækvivalensrelation harmonerer med virkningen af $G$ på $X$.

(2) Lad $Z$ være en mængde og lad $\varphi\colon X \to Z$ være en surjektiv afbildning. Vis, at hvis den til $\varphi$ hørende ækvivalensrelation harmonerer med virkningen af $G$ på $X$, så findes der en entydigt bestemt virkning af $G$ på $Z$ så at $\varphi$ er en $G$-afbildning.

I det følgende betegner $K$ et legeme. Gruppen $G := GL_2(K)$ virker da på naturlig måde på delmængden $X := \{\binom{x_1}{x_2} \mid \binom{x_1}{x_2} \neq \binom{0}{0}\}$ af $K^2$. Lad $\overline{K} := K \cup \{\infty\}$ betegne foreningsmængden, hvor $\infty$ er et nyt symbol. For $\binom{x_1}{x_2} \in X$ sættes
$$x_1/x_2 := \begin{cases} x_1 x_2^{-1} & \text{hvis} \quad x_2 \neq 0 \\ \infty & \text{hvis} \quad x_2 = 0. \end{cases}$$


Opgave 2 fortsættes på side 2

(3) Vis, at den ved $\binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1/x_2$ definerede afbildning $\varphi\colon X \to \overline{K}$ er surjektiv, og at den til afbildningen hørende ækvivalensrelation $\sim$ er bestemt ved

$$x \sim x' \iff \exists \lambda \in K^* : x' = \lambda x\,.$$

(4) Vis, at der findes en entydigt bestemt virkning af $GL_2(K)$ på $\overline{K}$, så at den i (3) nævnte afbildning er en $GL_2(K)$-afbildning, og beskriv denne virkning.

## Opgave 3

Lad $M$ være en modul over et hovedidealområde $R$ og lad $\alpha, \beta$ være elementer i $R \setminus (0)$. Lad $\Gamma_\alpha(M) \subseteq M$ være undermodulen givet ved

$$\Gamma_\alpha(M) := \{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N} : \alpha^n x = 0\}.$$

At $\Gamma_\alpha(M)$ er en undermodul af $M$ er let at indse (og ønskes ikke yderligere uddybet).

(1) Vis, at

$$\Gamma_\alpha\big(M/\Gamma_\alpha(M)\big) = \{0\}.$$

(2) Vis, at hvis $\Gamma_\alpha\big(R/(\beta)\big) = \{0\}$, så er $\alpha$ og $\beta$ primiske.

I det følgende antages yderligere, at $M$ er en endeligt frembragt torsionsmodul og at $\delta \in R$ er en frembringer for annullatoren for $M$, altså at $Ann(M) = (\delta)$.

(3) Vis, at hvis $\Gamma_\alpha(M) = \{0\}$, så er $\alpha$ og $\delta$ primiske.
(4) Vis, at hvis $\alpha$ og $\delta$ er primiske, så er $\Gamma_\alpha(M) = \{0\}$.

## Opgave 4

Lad $F$ være $\mathbf{Z}$-modulen $F := \mathbf{Z}^2$ og betragt i $F$ følgende 3 undermoduler:

$$K := \mathbf{Z}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + \mathbf{Z}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} \qquad L := \mathbf{Z}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + \mathbf{Z}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad M := \mathbf{Z}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + \mathbf{Z}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}.$$

Lad $N$ betegne kvotienten $N := F/K$.

(1) Vis, at kvotientmodulen $F/L$ er cyklisk ved at angive en frembringer og bestem et naturligt tal $a$, så at $F/L \simeq \mathbf{Z}/(a)$.
(2) Vis, at undermodulerne $L$ og $M$ indeholder $K$, og at kvotienterne $L/K$ og $M/K$ er cykliske. Bestem et naturligt tal $b$, så at $L/K \simeq \mathbf{Z}/(b)$.
(3) Vis, at $N$ er en endelig gruppe, og bestem dens orden.
(4) Forfin kæden

$$\{0\} \subset M/K \subset N$$

til en Jordan-Hölder kæde i $N$.