Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1986–87

MATEMATIK 2 AL

Nedenstående er et genoptryk og ikke en kopi.
Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Opgave 1

Lad $f = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbf{Z}[X]$ være et normeret polynomium af grad n, lad R være kvotientringen $R := \mathbf{Z}[X]/(f)$, og lad $\xi := \boxed{X}$ betegne ækvivalensklassen, der indeholder X.

(1) Vis, at R som $\mathbf{Z}$–modul er fri med basis $1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}$. I det følgende identificerer vi R som $\mathbf{Z}$–modul med $\mathbf{Z}^n$ v.hj.a. denne basis.
(2) Lad $\alpha \in R$ og lad $\det(\alpha)$ betegne determinanten af matricen hørende til afbildningen $\alpha_R : R \to R$ mht. basen ovenfor. Vis, at $\alpha \in R$ er et regulært element, hvis og kun hvis $\det(\alpha) \neq 0$.
(3) Vis, at hvis $\alpha \in R$ er et regulært element, så er kvotientringen $R/(\alpha)$ en endelig ring.
(4) Bestem, når $f = X^3 + X + 1$ og $\alpha = \xi - 1$, ordenen af kvotienten $R/(\alpha)$.

Opgave 2

I matricen $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ opfattes koefficienterne som elementer i legemet $\mathbf{Z}/3 = \mathbf{F}_3$.

(1) Bestem ordenen af gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$.
(2) Vis, at $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$, og bestem ordenen af σ.
(3) Vis, at den ved σ bestemte lineære afbildning : ${\mathbf{F}_3}^2 \to {\mathbf{F}_3}^2$ ikke har egenvektorer.
(4) Idet de 9 elementer i ${\mathbf{F}_3}^2$ betegnes $v_{ij} := (i, j)$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2$, er automorfien σ en permutation af disse 9 elementer. Skriv denne permutation som sammensætning af disjunkte cykler.

Opgave 3

I ringen $R := \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ af alle reelle følger $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ med sædvanlig addition og multiplikation betragtes delmængden $\mathcal{I}$ defineret ved $\mathcal{I} := \{\lambda \mid \lambda_n = 0 \quad \text{fra et vist trin}\}$.

(1) Vis, at $\mathcal{I}$ er et ideal i R og begrund, at der i R findes et maksimalideal $\mathcal{M}$, så at $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$. I det følgende betegner $\mathcal{M}$ et sådant maksimalideal, den tilhø-

 Opgave 3 fortsættes på side 2

rende kvotientring betegnes $L := R/\mathcal{M}$, og $\boxed{} : R \to L$ betegner den kanoniske homomorfi.

(2) Vis, at L er et legeme, og vis, at den ved $a \mapsto \boxed{(a, a, \dots)}$ definerede afbildning $: \mathbf{R} \to L$ er injektiv.

(3) For en følge $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ defineres følgerne λ^+ og λ^- ved

$$\lambda_n^+ := \begin{cases} \lambda_n & \text{hvis} \quad \lambda_n > 0 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad \lambda_n^- := \begin{cases} -\lambda_n & \text{hvis} \quad \lambda_n < 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis, at $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, og at $\lambda^+ \cdot \lambda^- = 0$. Vis, at hvis λ ikke tilhører $\mathcal{M}$, så vil præcis en af følgerne λ^+ og λ^- heller ikke tilhøre $\mathcal{M}$.

(4) Lad $P \subseteq L$ være delmængden defineret ved

$$P := \{\boxed{\lambda} \mid \lambda \in R \setminus \mathcal{M} \quad \text{og} \quad \lambda_n \geq 0 \text{ for alle} \quad n\}.$$

Lad "$<$" være relationen i L defineret ved $x < y \iff y - x \in P$. Vis, at $(L, +, \cdot, <)$ er en ordnet ring.

Opgave 4

(1) Angiv i Gauss' talring $\mathbf{Z}[i]$ en primopløsning af tallet 50.
(2) Bestem samtlige elementer r i $\mathbf{Z}[i]$ som opfylder, at r^2 er associeret med 50.
(3) Angiv et maksimalideal i $\mathbf{Z}[i]$, som indeholder 50.
(4) Bestem i $\mathbf{Z}[i]$ antallet af divisorer i 50.