Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1986

MATEMATIK 2AL

Nedenstående er et genoptryk og ikke en kopi

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Opgave 1

Lad R være en kommutativ ring og betragt delmængden

$$O_n(R) = \{\alpha \in Mat_n(R) \mid \alpha^t \alpha = 1_n\}.$$

(i) Vis, at $O_n(R)$ er en undergruppe i den generelle lineære gruppe $GL_n(R)$, og at $(\det \alpha)^2 = 1$, når $\alpha \in O_n(R)$.

(ii) Vis for $a, b, c, d \in R$, at

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(R) \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

(iii) Vis, at

$$O_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -ub \\ b & ua \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, u \in R, \quad a^2 + b^2 = u^2 = 1 \right\}$$

(iv) Diedergruppen D_4 består som bekendt af de 8 ortogonale automorfier af $\mathbf{R}^2$, som afbilder mængden $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ på sig selv. Vis, at $O_2(\mathbf{Z}) = D_4$.

(v) En ringhomomorfi : $R' \to R$ inducerer en gruppehomomorfi : $O_2(R') \to O_2(R)$. Under hvilke betingelser om R gælder, at homomorfien : $O_2(\mathbf{Z}) \to O_2(R)$ er injektiv?

(vi) Angiv et primtal $p > 2$ og en matrix α, så at

$$\alpha \in O_2(\mathbf{F}_p) \setminus D_4.$$

Opgave 2

(i) Lad R være et hovedidealområde, lad $M \subseteq R^n$ være undermodulen frembragt af elementer $v_1, \ldots, v_k \in M$, lad $f : M \to R$ være homomorfien bestemt ved $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_n$ og

Opgave 2 fortsættes på side 2

lad M_0 være kernen for f. Vis, at der findes et element $v \in M$ og skalarer $\mu_1, \ldots, \mu_k \in R$, så at $f(v_i) = \mu_i f(v)$, $i = 1, \ldots, k$. Vis, at hvis $f(v) \neq 0$, så udgør elementerne $v_i - \mu_i v$, $i = 1, \ldots, k$, et frembringersystem for M_0.

(ii) Lad $N \subseteq \mathbf{Z}^3$ være undergruppen frembragt af elementerne $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. Angiv en fri basis for N (som $\mathbf{Z}$-modul).

(iii) Hvilken orden har kvotienten $\mathbf{Z}^3/N$.

Opgave 3

Polynomiet $f = X^2 + X + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$ er det eneste irreducible andengradspolynomium i $\mathbf{F}_2[X]$ (Dette kræves ikke bevist). Sæt $g = X^5 + X^3 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$.

(i) Angiv den principale rest, r, af g ved division med f (dvs. det polynomium $r \in \mathbf{F}_2[X]$ af grad < 2, så at $g - r$ er deleligt med f).

(ii) Vis, at g er et irreducibelt polynomium.

(iii) Hvad kan du sige om kvotienten $\mathbf{F}_2[X]/(g)$?

Opgave 4

Lad K være et legeme og lad τ være en ikke-triviel involution i K. ($\tau : K \to K$ er altså en automorfi, så $\tau \neq Id_K$, $\tau^2 = Id_K$.)

(i) Vis, at delmængden

$$L := \{\alpha \in K \mid \tau(\alpha) = \alpha\}$$

er et dellegeme af K og at $L \subset K$.

(ii) For $\alpha \in K$ sættes $S(\alpha) := \tau(\alpha) + \alpha$, $N(\alpha) := \tau(\alpha)\alpha$. Vis, at $S(\alpha) \in L$ og $N(\alpha) \in L$ og at α er rod i polynomiet $X^2 - S(\alpha)X + N(\alpha) \in L[X]$.

(iii) Lad $\xi \in K \setminus L$ og sæt

$$L[\xi] := \{x + y\xi \mid x, y \in L\}.$$

Vis, at $L[\xi] \subseteq K$ er en delring.

(iv) Vis, at $L[\xi]$ er et dellegeme.

(v) Vis, at $L[\xi] = K$. [Vink: Løs f.eks. for $\alpha \in K$ ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + \xi y &= \alpha \\ x + \tau(\xi) y &= \tau(\alpha) \end{aligned} \qquad x, y \in K]$$