

MATEMATIK 2 AL

Nedenstående er et genoptryk og ikke en kopi.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Opgave 1

Lad Λ være en ring af karakteristik n .

- (i) Vis, at der for alle $\lambda \in \Lambda$ gælder $n\lambda = 0$, hvor 0 betegner nul-elementet i Λ .
- (ii) Antag, at Λ er en endelig ring. Vis, at n og $|\Lambda|$ har de samme primtal som divisorer.
- (iii) Antag, at $|\Lambda| = 30$. Vis, at Λ er isomorf med restklasseringen $\mathbf{Z}/30$.

Opgave 2

- (i) Vis, at polynomiet $X^2 + X + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$ er irreducibelt i $\mathbf{F}_2[X]$.
- (ii) Vis, at $X^2 + X + 1$ er det eneste irreducible andengradspolynomium i $\mathbf{F}_2[X]$.
- (iii) Vis, at kvotienten $\mathbf{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$ er et legeme med 16 elementer.

Opgave 3

Den symmetriske gruppe S_4 består som bekendt af: identiteten, 6 transpositioner, 8 3-cykler, 6 4-cykler og 3 dobbelt-transpositioner. Lad $H \subseteq S_4$ være en undergruppe af orden 8. For $\sigma \in S_4$ betegnes med $C(\sigma)$ centralisatoren for σ , dvs. $C(\sigma) := \{ \tau \in S_4 \mid \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma \}$.

- (i) Vis, at H ikke indeholder nogen 3-cykler.
- (ii) Lad $\tau \in S_4$ være en transposition. Vis, at $|C(\tau)| = 4$.
- (iii) Lad $\delta \in S_4$ være en 4-cykel. Vis, at $|C(\delta)| = 4$.
- (iv) Som bekendt har en gruppe af orden 8 et ikke-trivielt centrum. Vis, at der i H findes en dobbelt-transposition $\sigma = (x_1, x_2)(x_3, x_4)$ således at $H = C(\sigma)$, og angiv (udtrykt ved x_1, x_2, x_3, x_4) de 8 elementer i H .
- (v) Diedergruppen D_4 kan som bekendt opfattes som bestående af de permutationer af hjørnerne i et kvadrat, der kan realiseres ved drejninger eller spejlinger. Vis, at H er isomorf med D_4 .

Opgave 4

(i) Lad R være en kommutativ ring. Vis, at

$$H_3(R) := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a, b, c \in R \right\}$$

er en undergruppe i den generelle lineære gruppe $GL_3(R)$.

(ii) Gruppen $H_3(\mathbf{F}_2)$ virker på vektorrummet \mathbf{F}_2^3 . Vis, at

$$B := \left\{ \left(\begin{array}{c} b \\ c \\ 1 \end{array} \right) \mid b, c \in \mathbf{F}_2 \right\}$$

er en bane. Bestem samtlige baner og deres længder.

(iii) Vis, at $H_3(\mathbf{F}_2)$ er isomorf med diedergruppen D_4 . [Brug eventuelt resultatet fra opgave 3.]