Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1985-86.

MATEMATIK 2 AL.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Opgave 1.

Lad Λ være en ring af karakteristik n.

(i) Vis, at der for alle $\lambda \in \Lambda$ gælder $n\lambda = 0$, hvor 0 betegner nul-elementet i Λ.

(ii) Antag, at Λ er en endelig ring. Vis, at n og $|\Lambda|$ har de samme primtal som divisorer.

(iii) Antag, at $|\Lambda| = 30$. Vis, at Λ er isomorf med restklasseringen $\mathbb{Z}/30$.

Opgave 2.

(i) Vis, at polynomiet $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ er irreducibelt i $\mathbb{F}_2[X]$.

(ii) Vis, at $X^2 + X + 1$ er det eneste irreducible andengradspolynomium i $\mathbb{F}_2[X]$.

(iii) Vis, at kvotienten $\mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$ er et legeme med 16 elementer.

Opgave 3.

Den symmetriske gruppe S_4 består som bekendt af:

(opgaven fortsættes!)

identiteten, 6 transpositioner, 8 3-cykler, 6 4-cykler og 3 dobbelt-transpositioner. Lad $H \subseteq S_4$ være en undergruppe af orden 8. For $\sigma \in S_4$ betegnes med $C(\sigma)$ centralisatoren for σ, dvs $C(\sigma) := \{\tau \in S_4 \mid \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\}$.

(i) Vis, at H ikke indeholder nogen 3-cykler.

(ii) Lad $\tau \in S_4$ være en transposition. Vis, at $|C(\tau)| = 4$.

(iii) Lad $\delta \in S_4$ være en 4-cykel. Vis, at $|C(\delta)| = 4$.

(iv) Som bekendt har en gruppe af orden 8 et ikke-trivielt centrum. Vis, at der i H findes en dobbelt-transposition $\sigma = (x_1, x_2)(x_3, x_4)$ således at $H = C(\sigma)$, og angiv (udtrykt ved x_1, x_2, x_3, x_4) de 8 elementer i H.

(v) Diedergruppen D_4 kan som bekendt opfattes som bestående af de permutationer af hjørnerne i et kvadrat, der kan realiseres ved drejninger eller spejlinger. Vis, at H er isomorf med D_4

Opgave 4.

(i) Lad R være en kommutativ ring. Vis, at
$$H_3(R) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in R \right\}$$
er en undergruppe i den generelle lineære gruppe $GL_3(R)$.

(ii) Gruppen $H_3(\mathbb{F}_2)$ virker på vektorrummet $\mathbb{F}_2^{\,3}$. Vis, at $B := \left\{ \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b, c \in \mathbb{F}_2 \right\}$ er en bane. Bestem samtlige baner og deres længder.

(iii) Vis, at $H_3(\mathbb{F}_2)$ er isomorf med diedergruppen D_4.
[Brug eventuelt resultatet fra opgave 3].