Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1985

MATEMATIK 2 AL

Nedenstående er et genoptryk og ikke en kopi.
Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Opgave 1

En ring, hvori alle elementer f er idempotente (dvs. opfylder: $f^2 = f$), kaldes en *boole'sk ring*. I det følgende betegner Λ en boole'sk ring forskellig fra nulringen.

(i) Vis, at enhver delring af Λ og enhver kvotientring af Λ igen er en boole'sk ring.
(ii) Vis, at Λ har karakteristik 2.
(iii) Vis, at Λ er kommutativ.
(iv) Vis, at det eneste integritetsområde, som er en boole'sk ring, er restklasseringen $\mathbf{Z}/2 = \mathbf{F}_2$.
(v) Vis, at hvert primideal $\mathcal{P} \subset \Lambda$ er et maksimalideal og at $\Lambda/\mathcal{P} = \mathbf{F}_2$.
(vi) Vis,at der for hvert $f \neq 0$ i Λ findes et maksimalideal $\mathcal{P} \subset \Lambda$, så at $1 - f \in \mathcal{P}$.
(vii) Lad X betegne mængden af primidealer i Λ. Vis, at Λ er isomorf med en delring af ringen $Afb(X, \mathbf{F}_2)$ af alle afbildninger $\varphi \colon X \to \mathbf{F}_2$.

Opgave 2

(i) Lad C være en (multiplikativt skrevet) cyklisk gruppe. Vis, at enhver gruppehomomorfi : $C \to C$ er af formen $x \mapsto x^a$ med et passende $a \in \mathbf{Z}$.

(ii) Lad N være en normal undergruppe i en grupe G. Antag, at N er cyklisk. Vis, at enhver undergruppe i N er en normal undergruppe i G.

(iii) Bestem antallet af automorfier af gruppen $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$.

Opgave 3

(i) Lad R være en faktoriel ring og lad $K \supseteq R$ betegne brøklegemet. Vis, at hvis $\alpha \in K$ er rod i et normeret polynomium

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in R[X],$$

så er $\alpha \in R$.

Retyped 20. april 1988/AT
Opgave 3 fortsættes på side 2

(ii) Lad $\alpha \in \mathbf{C}$ være irrationalt og rod i et oplynomium $X^2 + bX + c \in \mathbf{Z}[X]$, og lad $s > 1$ være et naturligt tal. Vis, at de kvadratiske talringe $\mathbf{Z}[\alpha]$ og $\mathbf{Z}[s\alpha]$ har samme brøklegeme K og at dette kan beskrives som $K = \{ q_1 + q_2\alpha \mid q_1, q_2 \in \mathbf{Q} \}$.

Vis (med betegnelserne fra (ii)), at den kvadratiske talring $\mathbf{Z}[s\alpha]$ ikke er faktoriel.

Opgave 4

I de følgende (indbyrdes uafhængige) spørgsmål betegner $Q \subseteq \mathbf{Z}$ delmængden $Q = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(i) For hvilke $n \in Q$ har kongruensen

$$nx \equiv 15 \pmod{30}$$

en og (på nær kongruens modulo 30) kun én løsning?

(ii) For hvilke $n \in Q$ er kvotientringen

$$\mathbf{Z}/n\,[X]/(X^2 + 1)$$

et legeme?

(iii) Lad M betegne $\mathbf{Z}$-modulen $\mathbf{Z}^2$. For $n \in \mathbf{Z}$ betegnes med $N_n \subseteq M$ undermodulen frembragt af $\binom{2}{1}$ og $\binom{n}{2}$. For hvilke $n \in Q$ er kvotientmodulen M/N_n en simpel $\mathbf{Z}$-modul?