Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1985

MATEMATIK 2AL

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes.

Opgave 1.

En ring, hvori alle elementer f er idempotente (dvs opfylder: $f^2 = f$), kaldes en boole'sk ring. I det følgende betegner Λ en boole'sk ring forskellig fra nulringen.

(i) Vis, at enhver delring af Λ og enhver kvotientring af Λ igen er en boole'sk ring.

(ii) Vis, at Λ har karakteristik 2.

(iii) Vis, at Λ er kommutativ.

(iv) Vis, at det eneste integritetsområde, som er en boole'sk ring, er restklasseringen $\mathbb{Z}/2 = \mathbb{F}_2$.

(v) Vis, at hvert primideal $\mathfrak{p} \subset \Lambda$ er et maksimalideal, og at $\Lambda/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_2$.

(vi) Vis, at der for hvert $f \neq 0$ i Λ findes et maksimalideal $\mathfrak{p} \subset \Lambda$, så at $1 - f \in \mathfrak{p}$.

(vii) Lad X betegne mængden af primidealer i Λ. Vis, at Λ er isomorf med en delring af ringen $\mathrm{Afb}(X, \mathbb{F}_2)$ af alle afbildninger $\varphi : X \to \mathbb{F}_2$.

(opgavesættet fortsættes!)

Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1985.
MATEMATIK 2AL, side 2.

Opgave 2.

(i) Lad C være en (multiplikativt skrevet) cyklisk gruppe. Vis, at enhver gruppehomomorfi : $C \to C$ er af formen $x \mapsto x^a$ med et passende $a \in \mathbb{Z}$.

(ii) Lad N være en normal undergruppe i en gruppe G. Antag, at N er cyklisk. Vis, at enhver undergruppe i N er en normal undergruppe i G.

(iii) Bestem antallet af automorfier af gruppen $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Opgave 3.

(i) Lad R være en faktoriel ring og lad $K \supseteq R$ betegne brøklegemet. Vis, at hvis $\alpha \in K$ er rod i et normeret polynomium

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in R[X],$$

så er $\alpha \in R$.

(ii) Lad $\alpha \in \mathbb{C}$ være irrationalt og rod i et polynomium $X^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$, og lad $s > 1$ være et naturligt tal. Vis, at de kvadratiske talringe $\mathbb{Z}[\alpha]$ og $\mathbb{Z}[s\alpha]$ har samme brøklegeme K og at dette kan beskrives som $K = \{ q_1 + q_2\alpha \mid q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \}$.

(iii) Vis (med betegnelserne fra (ii)), at den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[s\alpha]$ ikke er faktoriel.

(opgavesættet fortsættes!)

Københavns universitet.
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1985.
MATEMATIK 2AL, side 3.

Opgave 4.

I de følgende (indbyrdes uafhængige) spørgsmål betegner $Q \subseteq \mathbb{Z}$ delmængden $Q = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

(i) For hvilke $n \in Q$ har kongruensen
$$nx \equiv 15 \quad (\text{modulo } 30)$$
en og (på nær kongruens modulo 30) kun én løsning?

(ii) For hvilke $n \in Q$ er kvotientringen
$$\mathbb{Z}/n\,[X]\,/\,(X^2+1)$$
et legeme?

(iii) Lad M betegne $\mathbb{Z}$-modulen $\mathbb{Z}^2$. For $n \in \mathbb{Z}$ betegnes med $N_n \subseteq M$ undermodulen frembragt af $\binom{2}{1}$ og $\binom{n}{2}$. For hvilke $n \in Q$ er kvotientmodulen M/N_n en simpel $\mathbb{Z}$-modul?