

Matematik 2AL

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, at $2005 = 5 \cdot 401$, og at 167 og 401 er primtal.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/2005)^*$? Bestem den største orden af et element i denne gruppe.
2. Idet $\sigma := (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)(6\ 7\ 8\ 9)$ ønskes bestemt cykelfremstilling, type, orden og fortegn for σ . Bestem potensen σ^{2004} .
3. Bestem det mindste naturlige tal n således, at A_n indeholder en permutation af orden 2004.
4. Bestem de mulige cykeltyper for de permutationer σ i S_6 , som opfylder, at σ^2 har cykeltypen $1^2 2^2$, altså er en dobbelttransposition.
5. Hvor mange permutationer i S_6 kommuterer med dobbelttranspositionen $(1\ 2)(3\ 4)$?
6. Bestem de kommutative grupper af orden $5^3 \cdot 31$.
7. Vis, at en gruppe af orden $5^3 \cdot 31$ ikke kan være simpel.
8. Hvilken orden har Sylow-167-undergruppen i S_{2004} ?
9. Betragt den kvadratiske taling $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Vis, at tallene $2 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og ikke associerede i R . Vis, at tallene $3 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og associerede i R .

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2010} + 580$.

10. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.
11. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
12. Idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 401, kan f opfattes som polynomium i $\mathbb{F}_{401}[X]$. Vis, at restklassen af 2 modulo 401 er rod. Hvor mange rødder har polynomiet i \mathbb{F}_{401} ? [Vink: Vis, og udnyt, at for alle $a \in \mathbb{F}_{401}^*$ er $a^{2010} = a^{10}$.]
13. Lagkager, bestående af 6 ens stykker, glaceres sådan, at hvert stykke er ensfarvet. Der er glasur af 4 forskellige farver. Hvor mange forskellige lagkager findes der?
14. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 glasperler findes der, når der er perler af 4 forskellige farver?
15. På hvor mange måder kan man lægge æbleskiver af 4 forskellige farver i en æbleskivepande, når det midterste af de 7 huller skal være tomt?