Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 2004

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2{\cdot}3{\cdot}167$, og at 167 er et primtal.

1. Bestem den største orden af et element i gruppen $(\mathbb{Z}/2004)^*$.

2. Idet tallene $0, 1, 2, \dots, 10$ identificeres med deres restklasser modulo 11, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto x^3+3 \pmod{11}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

3. Hvilke permutationer konjugerer $(1\,2)(3\,4\,5)$ over i $(1\,2\,3)(4\,5)$? Hvilke af dem er lige?

4. Gruppen S_n kan opfattes som undergruppen af S_{n+2} bestående af de permutationer, der har $n+1$ og $n+2$ som fikspunkt. Lad $\tau = (n{+}1\; n{+}2)$ være transpositionen, der ombytter $n+1$ og $n+2$. For hver permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ sættes $\sigma^* = \sigma$, hvis $\sigma \in A_n$, og $\sigma^* = \sigma\tau$ ellers. Vis, at afbildningen $\sigma \mapsto \sigma^*$ er en injektiv homomorfi $\mathrm{S}_n \to \mathrm{A}_{n+2}$.

5. Vis, at gruppen $G = \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$ er den eneste kommutative gruppe, der har orden 72 og indeholder 24 elementer af orden 6.

6. Gruppen $(\mathbb{Z}/16)^*$ er isomorf med et produkt af cykliske grupper. Angiv dette produkt.

7. Gruppen S_5 virker på mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, og dermed også på mængden $\mathcal{P}$ af alle delmængder af denne mængde. Bestem under denne virkning af S_5 på $\mathcal{P}$ isotropigruppen for $\{1, 2\}$, og banen gennem $\{1, 2\}$.

8. Vis, at der kun er én gruppe af orden $7 \cdot 11 \cdot 13$.

9. Vis, at hvis σ og τ er disjunkte 5-cykler i S_{15}, så udgør permutationerne af formen $\sigma^i\tau^j$ en undergruppe af orden 25. Vis, at Sylow-5-undergrupperne i S_{15} er isomorfe med $\mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5$.

10. Lad m betegne antallet af Sylow-3-undergrupper i en gruppe af orden 60. Bestem de værdier af m, der er mulige ifølge Sylow's sætninger. Giv for hver af disse værdier af m et eksempel på en gruppe af orden 60 med præcis m Sylow-3-undergrupper.

11. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når midterkvadratet skal være gult og hvert af de øvrige 8 kvadrater skal have en af farverne rød, grøn eller blå.

12. Vis, i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$, at tallet $3-2\sqrt{11}$ er divisor i $53-12\sqrt{11}$. Vis, at tallet $3-2\sqrt{11}$ har en ikke-triviel divisor. [Vink: led blandt tal med norm 5.] Bestem en irreducibel opløsning af $53-12\sqrt{11}$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 12X^2 + 9$.

13. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$. [Vink: kig på polynomiet $f(X+1)$.]

15. For et primtal $p > 3$ identificeres koefficienterne i f med deres restklasser modulo p. Vis, at hvis f i $\mathbb{F}_p$ har roden a, så har f fire rødder i $\mathbb{F}_p$, nemlig $\pm a$ og $\pm 3a^{-1}$.