Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2003–04

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $63457 = 31{\cdot}2047$, at $2^{11} = 2048$, at 2003 er et primtal, og at $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/63457)^*$ ordenen af restklassen af 2.

2. Hvor mange elementer i $(\mathbb{Z}/2003)^*$ har orden 13?

3. Idet de 15 tal $0, 1, \dots, 14$ identificeres med deres restklasser modulo 15, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto 2x \pmod{15}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

4. Angiv cykeltyperne for permutationer af orden 6 i den alternerende gruppe A_{11}.

5. Lad γ være en given permutation i S_n. Vis, at der altid findes permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_n$, som opfylder ligningen $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^{-1}$. Vis, at når σ opfylder ligningen, så vil også $\sigma\gamma$ opfylde ligningen. Vis, at når γ er en ulige permutation, så er ligningen altid opfyldt med en lige permutation σ.

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 162 og indeholder præcis 8 elementer af orden 3.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 60, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe af orden $3^3{\cdot}13$ ikke kan være simpel.

9. Om en gruppe G vides, at $|G| = 60$ og at G er simpel. Bestem antallet af elementer af orden 5 i G.

10. Lad $\varphi\colon \mathrm{S}_4 \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at billedet for φ har orden 2 og at kernen for φ har orden 12. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

11. Hvor mange perlekæder med 9 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

12. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 5, $5 + i$, $5 + 2i$, og $5 + 3i$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^6 + 2003$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 13, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{13}[X]$.