Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 2003

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen må benyttes, at $22176 = 288{\cdot}7{\cdot}11$, at $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$, og at 2003 er et primtal.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/22176)^*$ ordenen af restklassen af 17.

2. Bestem cykeltype, orden og fortegn for permutationen $(1\,2\,3\,4\,5\,6)(1\,7\,6)(1\,8\,9)(1\,0\,7)$; det er en permutation af de 10 cifre $0, 1, \dots, 9$.

3. Bestem den største mulige orden af en permutation i den alternerende gruppe A_9.

4. Bestem de mulige cykeltyper for permutationer af orden 2 i S_6. Hvor mange permutationer σ i S_6 opfylder, at $\sigma^2 = \mathrm{id}$?

5. Betragt 4-cyklen $\gamma = (1\,2\,3\,4)$ i S_4. Findes der en lige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en ulige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^2$?

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 80 og præcis 3 elementer af orden 2.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 120, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe G af orden $7^3{\cdot}19^3$ ikke kan være simpel.

9. Lad $\varphi\colon \mathrm{C}_{15} \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at kernen for φ har orden 3, og at billedet for φ har orden 5. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

10. Lad p være et ulige primtal. Hvor mange perlekæder med p perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

11. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 2002 og 2003. Angiv for hvert af disse to tal antallet af divisorer.

12. Hver koefficient i polynomiet $f = X^{2002} - 1$ er $0, 1$ eller -1, og f kan opfattes som polynomium i $L[X]$ for et vilkårligt legeme L. Hvor mange rødder har polynomiet i L, når (a) $L = \mathbb{R}$, (b) $L = \mathbb{C}$, (c) $L = \mathbb{F}_{2003}$, (d) $L = \mathbb{F}_{29}$?

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 67$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 2003, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{2003}[X]$. [Vink: $2003 - 67$ er et kvadrattal.]