Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2002–03

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Bestem ordenen af elementet $[\,4\,]_n$ i den multiplikative gruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$ for $n \in \{7, 11, 13\}$. Bestem endvidere ordenen af $[\,4\,]_{1001}$ i $(\mathbb{Z}/1001)^*$. $(1001 = 7\cdot 11\cdot 13.)$

2. Bestem cykelfremstilling, orden og fortegn for $\sigma = (12)(123)(1234)(12345) \in \mathrm{S}_5$.

3. Antag, at $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_9$ har $|\sigma| = 5$, og $|\tau| = 6$. Afgør, om $|\sigma\tau| = 12$ kan forekomme. Afgør, om $|\sigma\tau| = 30$ kan forekomme.

4. Betragt de additive kvotientgrupper $\mathbb{Z}/123$ og $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Bestem en *injektiv* gruppehomomorfi $\varphi\colon \mathbb{Z}/123 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

5. Lad $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ være en gruppehomomorfi. Begrund, at ψ ikke er surjektiv.

6. Bestem i gruppen $G \overset{\text{Def}}{=} D_3 \times D_6$ et element g^*, som ikke er det neutrale element, således at g^* kommuterer med alle elementer, dvs. $g^*g = gg^*$ for alle $\in G$.

7. Bevis, at grupperne $G = D_3 \times D_6$ og $H = A_4 \times D_3$ ikke er isomorfe. (Udnyt resultatet i opgave 6.)

8. Begrund, at gruppen G ikke er simpel, hvis $|G| = 6009$. (2003 er et primtal!)

9. Afgør, om $X^{2002} - 2025$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[\,X\,]$.

10. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[\,X\,]$.

11. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[\,X\,]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ med $\xi \overset{\text{Def}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, som er rod i $X^2+X+1 \in \mathbb{Z}[\,X\,]$. Ringen $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ *er* UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten $\mathrm{D}(\xi)$. Bestem normen $\mathrm{N}(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.

13. Afgør hvilke af elementerne ξ, $1 + \xi$ og $1 - \xi$, der er enheder i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

14. Afgør hvilke af elementerne $1 - \xi$, 3 og $1 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

15. Bestem normen $\mathrm{N}(4 + 5\xi)$ samt primopløsningen af $4 + 5\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

Med venlig hilsen, Hans-Bjørn Foxby

Recompiled 24.1.03/AT