Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2001–2002

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/630)^*$ ordenen af restklassen af 11. (Vink: $630 = 2{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$.)

2. I den symmetriske gruppe S_4 betragtes permutationerne $\sigma_2 = (1\ 2)$, $\sigma_3 = (1\ 2\ 3)$ og $\sigma_4 = (1\ 2\ 3\ 4)$. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma_2\sigma_3$ og $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$.

3. Bestem de mulige ordener af elementer i den symmetriske gruppe S_6.

4. I den symmetriske gruppe S_{10} betragtes en permutation τ som opfylder $\tau^4 = e$, hvor e er det neutrale element i S_{10}. Hvilke muligheder er der for cykeltypen af τ?

5. Vis at grupperne $D_3 \times C_5 \times C_6$ og $S_3 \times C_3 \times C_{10}$ er isomorfe.

6. Vis at grupperne $D_{12} \times C_5$ og $S_4 \times C_5$ ikke er isomorfe.

7. Bestem for hvilke primtal p det gælder at Sylow-p-undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow-p-undergrupperne i D_p.

8. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 234 har et element af orden 18, så er den cyklisk. (Vink: $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$.)

9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves når der er 5 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Vis at der findes heltal a, b og c så $1 + a\tau$ er invertibel i $\mathbb{Z}[\tau]$ og så $1 + b\tau$ er et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$, men så $1 + c\tau$ hverken er invertibel eller et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$. Det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.

11. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 73 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$.

12. Afgør hvilke af primtallene 2, 3, 5, 7 og 11 der er primelementer i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

13. Afgør for hvert element α i $\mathbb{F}_5$ om polynomiet $f_\alpha = X^3 + X^2 + \alpha$ er irreducibelt i ringen $\mathbb{F}_5[X]$.

I de sidste to spørgsmål betragtes polynomiet $g = X^4 + X^2 + 1$.

14. Afgør om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i g identificeres med deres restklasser modulo 2, om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$.