Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 2001

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/44)^*$ har et element af orden 5.

2. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes permutationen

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5).$$

Udregn cykelfremstilling, orden og fortegn af σ.

3. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes en permutation τ som opfylder $\tau \neq e$ og $\tau^5 = e$, hvor e er det neutrale element i S_5. Udregn cykeltype og fortegn af τ.

4. Angiv antallet af elementer af orden 3 i hver af følgende grupper: C_{60}, $A_4 \times C_5$, D_{30} og $D_3 \times D_5$.

5. Lad $(G, +)$ være en cyklisk gruppe og lad φ være en gruppehomomorfi fra $(G, +)$ til $(\mathbb{Q}, +)$. Vis at φ ikke kan være surjektiv.

6. Angiv de kommutative grupper af orden 56. Lad dernæst G være en gruppe af orden 56 som har netop 48 elementer af orden 7. Vis at G ikke er kommutativ.

7. Lad G være en gruppe af orden 56 og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 7. Vis at $a(G)$ er 6 eller 48.

8. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper i $A_4 \times A_5$.

9. Hvor mange karusseller med 12 heste kan der laves når der er 2 farver heste at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Afgør hvilke af tallene $4 + 3\tau$, $5 + 4\tau$, $6 + 5\tau$ og $7 + 6\tau$ der er primelementer i $\mathbb{Z}[\tau]$, idet det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.

11. Vis at $119 + 84\sqrt{2}$ ikke er et primelement i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Er $119 + 84\sqrt{2}$ et irreducibelt element i $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

12. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 4 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

13. Afgør om $X^2 + 1$ er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{C}[X]$, og om det er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

I de sidste to spørgsmål betragtes polynomierne $f = X^4 + 3X + 3$ og $g = X^2 + X + 1$.

14. Vis at f og g er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

15. Vis, idet koefficienterne i f og g identificeres med deres restklasser modulo 3, at f og g ikke er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.