Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2000–2001

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen, Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/189)^*$ indeholder mindst tre elementer af orden 6.

2. Betragt cyklerne $\rho = (1\,2\,3)$ og $\sigma = (3\,4\,5)$ og $\tau = (5\,6\,7)$ i S_7. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\rho\sigma$ og $\sigma\tau$ og $\tau\rho$.

3. Bestem potensen σ^{665} af permutationen $\sigma = (3\,4)(2\,4)(4\,6)(4\,5)(1\,6)$ i S_6.

4. En permutation μ i S_{12} har typen $3^2 6^1$. Hvilken type har μ^3?

5. Vis at grupperne $D_6 \times C_2$ og $A_4 \times C_2$ ikke er isomorfe.

6. Vis at der er netop to forskellige gruppehomomorfier fra C_6 til C_2.

7. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper i D_{12}.

8. Lad p være et primtal. Vis at Sylow-p-undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow-p-undergrupperne i S_{2p-1}.

9. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 220 har et element af orden 4, så er den cyklisk.

10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ lige store farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 5 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

11. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,$ og $8 + 3i$.

12. Angiv i talringen $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ en primopløsning af tallet 31.

13. Vis at netop to af polynomierne $X^6 - 25$, $X^6 - 26$, og $X^6 - 27$ er reducible i polynomiumsringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Vis at polynomiet $f = X^3 - X + 1$ er irreducibelt i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$.

15. Angiv en primopløsning af polynomiet $g = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$ i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$. [Vink: brug opgave 14.]

Retyped 13.1.03/LK