Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 2000

Matematik 2AL

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 15 opgaver der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/693)^*$ ordenen af restklassen af 2. (Vink: $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.)

2. Betragt cyklerne $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$ og $\tau = (5\,6\,7\,8\,9)$ i S_9. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ og $\tau\sigma\tau^{-1}$.

3. Vis at den symmetriske gruppe S_9 indeholder elementer af orden 14 og 20, men ingen elementer af orden 21.

4. Vis at følgende grupper er parvis ikke-isomorfe: $S_4\,, C_{24}\,, C_4 \times C_6\,, A_4 \times C_2$.

5. Vis at hvis φ er en gruppehomomorfi fra $(\mathbb{Q}, +)$ til $(\mathbb{Z}, +)$, så er φ triviel, dvs. $\varphi(q) = 0$ for alle $q \in \mathbb{Q}$. (Vink: Start med at vise $\varphi(1) = 0$.)

6. For hvilke primtal p findes en ikke-triviel Sylow-p-undergruppe i den alternerende gruppe A_9, og hvilke ordener har de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper?

7. Vis at en gruppe af orden 135 ikke kan være simpel.

8. Angiv de kommutative grupper af orden $4851 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$.

9. Hvor mange perlekæder med 11 perler kan der laves, når der er 4 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Vis at primtallet 5 er irreducibelt som element i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$. Er 5 et primelement i $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$? Er $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ UFD?

11. Vis at $77 + 55\sqrt{2}$ er et primelement i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

12. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsningen af tallet 380.

I de sidste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 38X^2 - 19$.

13. Afgør om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør om f er irreducibel osm polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, om f er irreducibel i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.