Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, 3. maj 1988

Matematik 224

ekstraordinær prøve

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Lommeregnere og alle hjælpemidler i øvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå er rigtig besvarelse af 4 spørgsmål samt halvdelen af opgaven i residueregning. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Hver af de alternative opgaver regnes ækvivalent med opgaven i residueregning.

Spørgsmål

1. Find alle løsninger til $\sin(\pi \text{ tg } z) = 0$.
2. Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!}\, z^n$ har konvergensradius 1 og divergerer i alle punkter af konvergenscirklen.
3. Angiv residuet i 0 for $\frac{\cos z}{z^3} - (\frac{1}{\sin z})^3$.
4. Find residuet i en af polerne for $(\frac{z}{z^2+1})^2 e^{z^2+1}$.
5. Find $\int_\Gamma \frac{z dz}{z^2+1}$, idet Γ er liniestykket fra $\frac{1}{3}(4+i5)$ til $\frac{1}{3}(4-i5)$.

Alternative spørgsmål

1a. Angiv residuet i ∞ for $\frac{z^2}{z^2-3z+2}$.

2a. Find en Laurentrække konvergent i den ved $1 < |z| < 2$ bestemte ring for funktionen $\frac{z^2}{z^2-3z+2}$.

3a. Angiv samtlige væsentlige singulariteter for $\sin(\pi \text{ tg } z)$.

4a. Vis at $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(z-n)^2}$ er en hel funktion med periode 1.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, 3. maj 1988
Matematik 224

Opgaver i residueregning

Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$.

(Råd: Integrer $\frac{z}{1+z^2} e^{iz}$ langs randen af halvcirklen $\{z = x + iy \mid |z| \leqq R\,,\ y \geqq 0\}$ og lad R gå mod ∞.)

Alternative opgaver

5a. Bevis den for $\alpha \in \mathbf{R}$ gyldige formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x} dx = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-|\alpha| y}}{\cosh y} dy \cos \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

hvor $+$ anvendes for $\alpha \geq 0$ og $-$ for $\alpha < 0$.

Råd: Integrer $\frac{e^{i\alpha z}}{\sin z}$ for $\alpha > 0$ langs randen af rektanglet

$$\{z = x + iy \mid |x| \leqq \frac{\pi}{2}\,,\ y \in [0, A]\}\,,$$

idet polen i 0 omgås langs en lille halvcirkelbue. Lad A gå mod ∞. Tilfældet $\alpha < 0$ følger selvfølgelig umiddelbart af tilfældet $\alpha > 0$.

6a. Vis for $\gamma > 0$, at $\Pi_{n=-\infty}^{\infty}(1 - e^{-\gamma(z-a_n)^2})$ er en hel funktion, når $(a_n \mid n \in \mathbf{Z})$ er en punktfølge, der tilfredsstiller, at $|a_n - n| \leqq 1$ for alle $n \in \mathbf{Z}$. Angiv alle funktionens nulpunkter.