Københavns Universitet

Naturvidenskabelige embedseksamen

Vinteren 1985/86

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Lommeregnere og alle hjælpemidler i øvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå er rigtig besvarelse af 4 spørgsmål samt halvdelen af opgaven i residueregning. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Hver af de alternative opgaver regnes ækvivalent med opgaven i residueregning.

Spørgsmål

1. Find alle løsninger til $\operatorname{tg} z = i \cdot \frac{3}{5}$.

2. Angiv residuet i 0 for $(z - \frac{1}{z})^n$, idet $n \in \mathbb{N}$.

3. Vis, at $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{z}{n}$ definerer en holomorf funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

4. For hvilke $z \in \mathbb{C}$ er $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^{(2^n)}$ konvergent?

5. En meromorf funktion er givet ved $f(z) = \dfrac{1 - e^{\alpha z}}{1 - e^{\beta z}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$. Angiv dens poler og nulpunkter, samt værdien $f(0)$.

Alternative spørgsmål

1a. Angiv residuet i ∞ af den ved $\dfrac{z^3 + 2}{z^2 - 1}$ definerede funktion.

2a. Vis, at $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$ definerer en i hele $\mathbb{C}$ meromorf funktion.

3a. Angiv værdien af $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\frac{1}{z}} (2z^2 + 3z + 1)\, dz$, idet Γ er enhedscirklen gennemløbet i positiv omløbsretning.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave i residueregning

Udregn $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^4}\,dx$.

Råd: Integrer $\displaystyle\frac{\log \cancel{x}\,z}{1+z^4}$ langs randen af den ved $z = x+iy$, $0 < r < |z| < R$, $x > 0$, $y > 0$, definerede kvartcirkelring, og lad $r \to 0$ og $R \to +\infty$. Benyt logaritmen med imaginærdel i $]-\pi,\pi[$.

NB. Derved udregnes samtidigt $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; men det kan jo også udregnes elementært.

Alternative opgaver

4a. Med $\Gamma_{\delta,\varepsilon,R}$ betegner vi for $\delta,\varepsilon \in]0,1[$ og $R > 2$ den integrationsvej, der er sammensat af intervallet $[-R,-1-\varepsilon]$, halvcirkelbuen i øvre halvplan med centrum -1 og radius δ , intervallet $[-1+\delta,1-\varepsilon]$, halvcirkelbuen i øvre halvplan med centrum $+1$ og radius ε , intervallet $[1+\varepsilon,R]$, samt halvcirkelbuen i øvre halvplan med centrum 0 og radius R .
Skitser kurven $\Gamma_{\delta,\varepsilon,R}$, og udregn dernæst $\displaystyle\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon,R}} \frac{e^{iuz}}{z^4-1}\,dz$ for $u > 0$.
Find endelig for δ og ε gående mod 0 fra højre og R gående mod $+\infty$ grænseværdien af

$$\int_{-R}^{-1-\delta} \frac{\cos ux}{x^4-1}\,dx + \int_{-1+\delta}^{1-\varepsilon} \frac{\cos ux}{x^4-1}\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\cos ux}{x^4-1}\,dx \quad .$$

5a. Vis, at $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{-2^n z}$ er holomorf i højre halvplan. Vis, at $f(z)$ ikke har en analytisk fortsættelse i nogen sammenhængende, åben mængde, der indeholder et punkt af den imaginære akse.