Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen
Vinteren 1984/85

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Lommeregnere og alle hjælpemidler i øvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå er rigtig besvarelse af 4 spørgsmål, samt halvdelen af opgaven i residueregning. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Hver af de alternative opgaver regnes ækvivalent med opgaven i residueregning.

Spørgsmål

1. Har $\frac{z\cos z - \sin z}{(1-\cos z)^2}$ et 0-punkt eller en pol i 0 og af hvilken multiplicitet ?

2. Find alle nulpunkter for $\sinh z - i\cos a$, idet a er et reelt tal.

3. Find residuet i 1 af $\frac{\cot \pi z}{1+\cos \pi z}$.

4. Har $e^{\frac{1}{z}}\cos\frac{1}{z} - \sin\frac{1}{z}$ en væsentlig singularitet i 0 ?

5. Find residuet af $\frac{1}{(z^2+z-6)^3}$ i en af polerne.

Alternative spørgsmål

1a. Find residuet i ∞ af $\frac{z^5}{(z^2+z-6)^3}$. Er ∞ en pol ?

2a. Udregn $\int_\Gamma \frac{dz}{z^n(z+2)}$, idet Γ er enhedscirklen og $n \in \mathbb{N}$.

3a. Bestem konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{(n!)^n}$.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave i residueregning

Udregn for $u > 0$ integralet $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux^2} \frac{\cos \pi ux}{\cosh x}\,dx$. Råd: Integrer $\frac{e^{uz(\pi i - z)}}{\cosh z}$ langs randen af rektanglet med hjørner $-a$, b, $b+\pi i$ og $-a+\pi i$, og lad a og b gå mod ∞.

Alternative opgaver

4a. Udregn for $\alpha \in]-1,2[$ integralet $\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha dx}{1+x^3}$ ved for $0 \leqq \arg z \leqq \frac{2\pi}{3}$ at vælge en passende entydig definition af $f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^3}$, integrere $f(z)$ langs randen af det ved $0 \leqq \arg z \leqq \frac{2\pi}{3}$, $|z| \leqq R$ bestemte cirkeludsnit og lade $R \to \infty$.

5a. Find dels for $0 < |z| < 2$ og dels for $|z| > 2$ udviklingen i Laurentrække af $f(z) = \frac{1}{z^n(z+2)}$ for $n \in \mathbb{N}$.