Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1984

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Lommeregnere og alle hjælpemidler iøvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå er rigtig besvarelse af 4 spørgsmål, samt halvdelen af opgaven i residueregning. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Hver af de alternative opgaver regnes ækvivalent med opgaven i residueregning.

Spørgsmål

1°. Angiv residuet i -1 af $\dfrac{\sinh z}{(1+z)^3}$. $\frac{1}{2}\sinh(-1)$

2°. Angiv residuet i 0 af $(z+\frac{1}{z})^p$, idet $p \in \mathbb{N}$. $\begin{cases} 0 & p \text{ lige} \\ \binom{p}{p-1} & p \text{ ulige} \end{cases}$

3°. Angiv konvergensradius for $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n^2)}}{(n!)^p}$, idet $p \in \mathbb{N}$. ∞

4°. Angiv for $a \in \mathbb{R}$ alle nulpunkter for $\cosh z - \cos a$. $\pm ia$

For hvilke værdier af a vil der forekomme nulpunkter med multiplicitet > 1 ? $\pm ia$

5°. Angiv Laurentrækken for $\dfrac{z^2-z+1}{z^2-3z+2}$ i den ved $1 < |z| < 2$ bestemte ring.

(Opgavesættet fortsættes)

Alternative spørgsmål

1a. Vis, at $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} 2^{-n} z$ er meromorf i hele $\mathbb{C}$.

2a. Bestem $\int_\Gamma \frac{2z}{z^2-1} e^{z^2} dz$, idet Γ er cirklen med centrum 0 og radius 2 gennemløbet mod uret. $4\pi i e$

3a. Udregn $\int_\Gamma \frac{z^5-z+1}{z^5-z^4+1} dz$, idet Γ er en cirkel, der omslutter alle nulpunkter for z^5-z^4+1 og gennemløbes mod uret. $2\pi i$

Opgave i residueregning.

Vis formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{1+x^2} dx = \pi \sqrt[e]{e} .$$

Råd: Integrer $\frac{e^{(e^{iz})}}{1+z^2}$ langs randen af den ved $z = x+iy$, $|z| \leq R$, $y \geq 0$ bestemte halvcirkel, og lad R gå mod ∞.

Alternative opgaver.

4a. Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} \pi x}{x(1+x^2)} dx$.

Råd: Integrer $\frac{\operatorname{tgh} \pi z}{z(z-i)}$ langs randen af rektanglet med hjørner b, $b+i$, $-a+i$ og $-a$, og lad a og b gå mod ∞.

5a. Vis, at $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{z}{2^n})$ er en i hele $\mathbb{C}$ holomorf funktion. Angiv dens nulpunkter, og vis, at den har en væsentlig singularitet i ∞. Vis, at den ikke er begrænset på den positive reelle akse, og heller ikke på nogen anden halvlinie med endepunkt 0.