Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1983

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Lommeregnere og alle hjælpemidler iøvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå, er rigtig besvarelse af 4 spørgsmål, samt halvdelen af residueopgaven. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret; men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Hver af de alternative opgaver regnes ækvivalent med opgaven i residueregning.

SPØRGSMÅL:

1^{o} Angiv residuet af $\frac{\cos \pi z}{1+z^2}$ for $z = i$.

2^{o} Har $\pi \cot \pi z - \frac{1}{\pi z^2} \operatorname{tg} \pi z$ en pol eller et nulpunkt for $z = 0$?

3^{o} Angiv konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=1}^{+\infty} n!n^{-n}z^n$.

4^{o} Lad $p \in \mathbb{N}$. Angiv residuet af $\frac{1}{z^p(z-1)(z-2)}$ for $z = 0$.

5^{o} Vælg α således, at $\cos z - \frac{\sin \alpha z}{\alpha z}$ får $z = 0$ som nulpunkt af så høj orden som muligt.

Hvad bliver denne orden?

(Opgavesættet fortsætte

ALTERNATIVE SPØRGSMÅL:

1a. Lad $p \in \mathbb{N}$. Angiv residuerne af $\left(\frac{2+z}{1+z}\right)^p$ for $z = -1$ og for $z = \infty$.

2a. Angiv residuet i punktet $z = -1$ af $\frac{P(z)}{(z+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, når $P(z)$ er polynomiet $a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$.

3a. Lad $p \in \mathbb{N}$. Find en Laurentrække for $\frac{1}{z^p(z-1)(z-2)}$ i en omegn af ∞.

OPGAVE I RESIDUEREGNING:

Udregn for $\alpha \in \,]-1,3[$ integralet

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(x^2+1)(x^2+4)} .$$

Råd: Definer $z^\alpha = e^{\alpha \log^* z}$, hvor $\log^* z$ fastlægges ved, at dens imaginærdel ligger i intervallet $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Integrer funktionen $\frac{z^\alpha}{(z^2+1)(z^2+4)}$ langs randen af det ved $z = x+iy$, $y \geqq 0$, $\varepsilon \leqq |z| \leqq R$ bestemte område. Hvad sker der for $\alpha = 1$?

(Opgavesættet fortsætt

ALTERNATIVE OPGAVER:

4a. Vi definerer $A_n = 1!2!3!\ldots(2n)!$ og betragter potenrækken

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{A_n} ,$$

som selvfølgelig konvergerer i hele $\mathbb{C}$.

i) Vis, at for $|z| = (2n)!(2n+1)!$ er $\frac{|z|^n}{A_n}$ større end summen af de numeriske værdier af alle rækkens øvrige led.

ii) Angiv antallet af nulpunkter for $f(z)$ med numerisk værdi $< (2n)!(2n+1)!$.

iii) Vis, at alle funktionens nulpunkter er simple, samt at de alle er negative. Råd: Betragt funktionens restriktion til $\mathbb{R}$.

5a. i) Vis, at $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)(n-z)}$ definerer en i hele $\mathbb{C}$ meromorf funktion.

ii) Vis, at $f(z)$ har de samme poler som $g(z) = \frac{\pi\cot \pi z}{1-4z^2}$, og at disse alle er simple. Gør dernæst rede for, at de singulære dele af de to funktioners Laurentrækker er identiske i hver af polerne.

Idet vi skriver $z = x+iy$, er det let at vise (ønskes ikke udført), at $f(z)$ og $g(z)$ går mod 0 ligeligt i x for $|y| \to$

iii) Vis, at $f(p+\frac{1}{2}+iy)$, $p \in \mathbb{Z}$, går mod 0 for $|p| \to +\infty$ ligeligt i y.

Det samme gælder (ønskes ikke bevist) for $g(z)$.

iv) Hvordan kan man nu slutte, at $f(z) = g(z)$?