Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1982

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Lommeregnere og alle hjælpemidler iøvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå er rigtig besvarelse af 4 spørgsmål, samt halvdelen af residueregningsopgaven. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Hver af de alternative opgaver regnes ækvivalent med residueregningsopgaven.

Spørgsmål

1° Kan $a \in \mathbb{R}$ vælges, således at $\sin z - z(1+az^2)\cos z$ får et nulpunkt af femte orden for $z = 0$?

2° Angiv residuet i 0 for funktionen $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1-z}{1+z}\right)$.

3° Udled potensrækkeudviklingen

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}(2n+3+(-1)^n)z^n ,$$

og angiv rækkens konvergensradius.

4° Bestem residuet i a for $\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^n$, idet $b \neq a$; $a,b \in \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}$. $n(a-b)$

5° Vis, at $\sin(\cot z)$ har en væsentlig singularitet i 0.

Opgavesættet fortsættes

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1982.

Matematik 224

Alternative spørgsmål

1a Kan en holomorf funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defineres ved

$|z| < 1 \Rightarrow |\sin z| \leq 2|z|$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi z}{2n^2} \quad ?$$

2a Angiv residuet i ∞ for $\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^n$, idet $b \neq a$; $a,b \in \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}$.

3a Angiv en Laurentrækkeudvikling i en omegn af ∞ for $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)}$.

Opgave i residueregning

Udregn integralerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{\cosh x} dx \qquad \text{og} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\cosh x} dx$$

for $\alpha \in]-1,1[$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Råd: Integrer funktionen $\frac{e^{(\alpha+i\beta)z}}{\cosh z}$ langs randen af rektanglet med hjørner $-a$, b, $b+i\pi$ og $-a+i\pi$, og lad a og b gå mod ∞.

Alternative opgaver

4a Vis for $u \in]0,1[$ formlen

$$\int_0^1 (1-t)^{-u} t^{u-1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi u} .$$

Råd: Vælg værdier af de flertydige potenser, således at $f(z) = (1-z)^{-u} z^{u-1}$ bliver en holomorf funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus [0,1] \to \mathbb{C},$$

(4a fortsat)

og udregn $\int_\Gamma f(z)dz$, hvor Γ er randen af et smalt rektangel om $[0,1]$ ved at udnytte residuet i ∞.

5a Forklar hvert skridt i nedenstående udregning, hvor $t \in \mathbb{C}$, $|t| < 1$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, medens er en passende valgt cirkelperiferi med centrum 0.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k}{q} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(1+z)^{\alpha+k}}{z^{q+1}} dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(1+z)^\alpha}{z^{q+1}} \sum_{k=0}^{\infty} ((1+z)t)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(1+z)^\alpha}{z^{q+1}(1-t-tz)} dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{q} \binom{\alpha}{k} \int_\Gamma \frac{dz}{z^{q-k+1}(1-t-tz)} = \sum_{k=0}^{q} \binom{\alpha}{k} \frac{t^{q-k}}{(1-t)^{q-k+1}} .$$