Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1981

MATEMATIK 224

2 timers skriftlig opgave.

Lommeregnere og alle hjælpemidler iøvrigt må medbringes.

Minimumskravet for at bestå er rigtig besvarelse af 4 spørgsmål, samt halvdelen af residueregningsopgaven. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Alternativ opgave 4a regnes ækvivalent med residueregningsopgaven og 5a med $\frac{3}{4}$ af residueregningsopgaven.

Spørgsmål

1°. Funktionen $z^{-2}\cot z$ har en pol i 0. Angiv dennes orden samt residuet.

2°. Angiv værdien af $\int_\Gamma \frac{1+z^2}{1+z^3}\,dz$, idet Γ er cirklen med centrum 0 og radius 2 orienteret mod uret.

3°. Lad $P(z)$ være et polynomium af positiv grad og med komplekse koefficienter. Har $P(e^{\frac{1}{z}})$ en væsentlig singularitet i 0, og har den andre singulariteter?

4°. Angiv konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{n^2}$. Er rækken konvergent i punkter på konvergenscirklens rand?

(Opgavesættet fortsættes)

5^o. Angiv nulpunkter og poler for $\left(\frac{z^2-4z+3}{z^2+4z+3}\right)^2$, og udregn residuet i en af polerne.

Alternative spørgsmål

1a. Har $\left(\frac{z^2-4z+3}{z^2+4z+3}\right)^2$ en pol i ∞? Hvad er dens residuum i ∞?

2a. Vis, at $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}(2^{-n}z)$ er en i hele $\mathbb{C}$ meromorf funktion.

3a. Hvordan kan man vise, at $\cos\sqrt{z}$ har en væsentlig singularitet i ∞?

Opgave i residueregning.

Vis formlen

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x^2)-\sin(x^2)}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4e} .$$

Råd: Integrer $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$ langs randen af cirkeludsnittet $\{z = x+iy \mid x > 0,\ y > 0,\ |z| < R\}$, og lad R gå mod ∞.

Alternative opgaver

4a. Ved $f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{5-z}} \cdot \frac{1}{z}$ defineres en holomorf funktion $f:\mathbb{C}^* \setminus [-1,5] \to \mathbb{C}$ nærmere fastlagt ved at $\sqrt{\frac{1+z}{5-z}}$ skal have positiv grænseværdi, når z går mod 0 langs den positive imaginære akse. Angiv $\operatorname{res}_f(\infty)$, og find derved $\int_{\Gamma_r} f(z)dz$, idet Γ_r er randen af rektanglet med hjørner i $-1-r\pm ir$ og $5+r\pm ir$, $r > 0$, gennemløbet med uret. Vis, at $\int_{\Gamma_r} f(z)dz$ er grænseværdien af

$$2\left(\int_{-1}^{-\delta} \sqrt{\frac{1+x}{5-x}}\,\frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{5} \sqrt{\frac{1+x}{5-x}}\,\frac{dx}{x}\right) ,$$

idet δ går mod 0 gennem positive værdier.

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1981

Matematik 224

5a. Vis, at

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1+z^{n^2}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots$$

definerer en holomorf funktion $f: E \to \mathbb{C}$, hvor E er den åbne enhedscirkelskive. Vis dernæst, at $f(z) = \frac{1}{1-z}$.