

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1980

MATEMATIK 224

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Lommeregner og alle hjælpemidler i øvrigt må medbringes.

Minimumskrav for at bestå er rigtig besvarelse af 3 spørgsmål samt halvdelen af residueopgaven. Alternative spørgsmål og opgaver kræves ikke besvaret, men besvarelse af disse modregnes eventuelle mangler i, at minimumskravet er opfyldt. Opgaven 4a regnes ækvivalent med opgaven i residueregning.

Spørgsmål

- 1^o. Angiv samtlige nulpunkter for $\sin \frac{1-z^2}{1+z}$ og angiv de reelle nulpunkters multiplicitet.
- 2^o. Hvilke punkter i \mathbb{C} er væsentlige singulariteter for $\sin \frac{1-z^2}{1+z}$?
- 3^o. Angiv konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2-8n+17}$, og undersøg, om rækken er absolut konvergent på konvergenscirkelens rand.
- 4^o. Angiv nulpunkter og poler og disses multiplicitet for $f(z) = \frac{(1+2z)^3}{(1-z^2)^2}$ og find residuet i en af polerne. (Regningerne forløber næsten ens for alle polerne, derfor ønskes udregningen kun udført i 1 tilfælde).

(Opgavesættet fortsættes)

Alternative spørgsmål

1a. Find residuet i 0 af $\frac{1}{f(z)}$, idet $f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 - 8n + 17)z^n$.

2a. Find $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$, idet Γ er liniestykket fra $A+1-iA$ til $-A+i(A+1)$, hvor A er et positivt tal.

3a. Find residuet i ∞ af $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

Opgave i residueregning

Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{\cosh x + 1}$. Råd: Integrer $\frac{e^{iz}}{\cosh z + 1}$ langs randen af et rektangel med vinkelspidser $-a$, b , $b+2\pi i$, $-a+2\pi i$, for positive tal a og b , og lad a og b gå mod ∞ .

Alternativ opgave

4a. Vis, at $f(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2z}$ definerer en holomorf funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Angiv den i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergente Laurent-række for $f(z)$, idet koefficienterne udtrykkes ved tallene $\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$, $p = 1, 2, \dots$.